Estatística para Cursos de Engenharia e Informática

Pedro Alberto Barbetta / Marcelo Menezes Reis / Antonio Cezar Bornia

São Paulo: Atlas, 2004

Cap. 4 - Probabilidade

APOIO:
Fundação de Apoio à Pesquisa Científica e Tecnológica do Estado de Santa Catarina (FAPESC)
Departamento de Informática e Estatística – UFSC (INE/CTC/UFSC)

Modelos probabilísticos

- Construção de modelos de probabilidade para entender melhor os fenômenos aleatórios

Modelos probabilísticos

Definição do experimento

↓

Definição dos resultados possíveis do experimento

↓

Definição de uma regra que obtenha a probabilidade de cada resultado ocorrer.

Espaço amostral

- O conjunto de *todos* os possíveis resultados do experimento é chamado de **espaço amostral** e é denotado pela letra grega Ω.

- Um espaço amostral é dito **discreto** quando ele for finito ou infinito enumerável; é dito **contínuo** quando for infinito, formado por intervalos de números reais.

Eventos

- Chamamos de **evento** a qualquer subconjunto do espaço amostral:

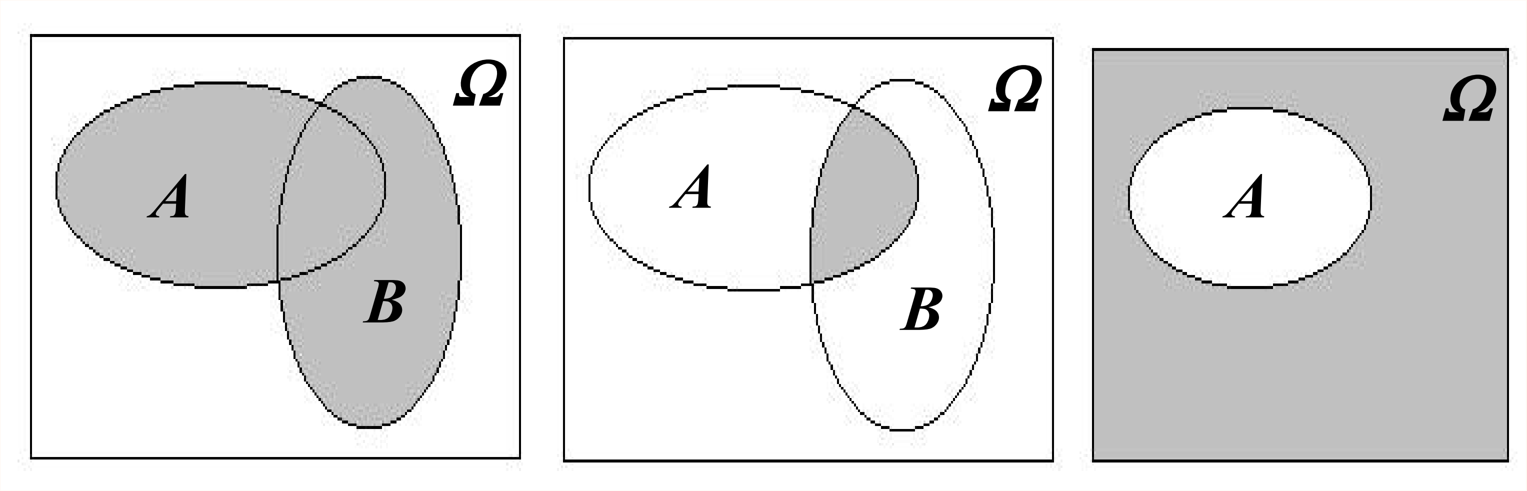
- A é um evento $\Leftrightarrow A \subseteq \Omega$

Operações entre eventos

(a) União: $A \cup B$

(b) interseção: $A \cap B$

(c) complementar: $\bar{A}$



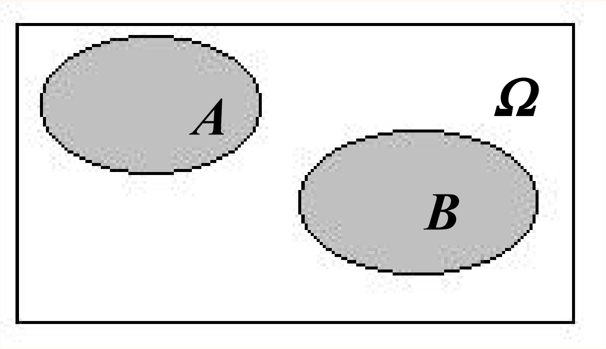
Operações entre eventos

Operação		Conjunto	Evento
a) União $A \cup B$		reúne os elementos de ambos os conjuntos	ocorre quando ocorrer pelo menos um deles (*A*, *B* ou ambos)
b) Interseção $A \cap B$		formado somente pelos elementos que estão em *A* e *B*	ocorre quando ocorrer ambos os eventos (*A* e *B*)
c) Complementar $\bar{A}$		formado pelos elementos que não estão em *A*	ocorre quando não ocorrer o evento *A* (*não A*)

Eventos mutuamente exclusivos

- Eventos são ditos **mutuamente exclusivos** se e só se eles não puderem ocorrer simultaneamente.

- *A* e *B* são *mutuamente exclusivos* $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$



Probabilidade de eventos

- Espaços amostrais discretos equiprováveis

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

- sendo:
  - n resultados *igualmente prováveis*,
  - n_A destes resultados pertencem a um certo evento A

Probabilidade de eventos

- Espaços amostrais discretos

- Se $A \subseteq \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$, então:

$$P(A) = \sum_{i:\, \varpi_i \in A} P(\omega_i)$$

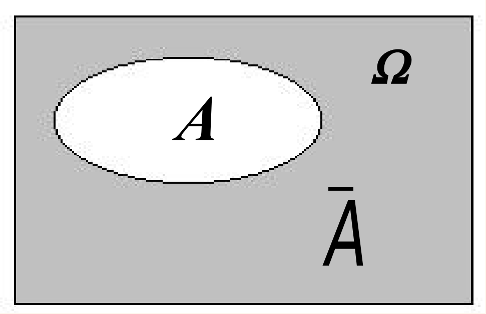
Propriedades

- $P(\emptyset) = 0$

- $P(\Omega) = 1$

- Probabilidade do evento complementar

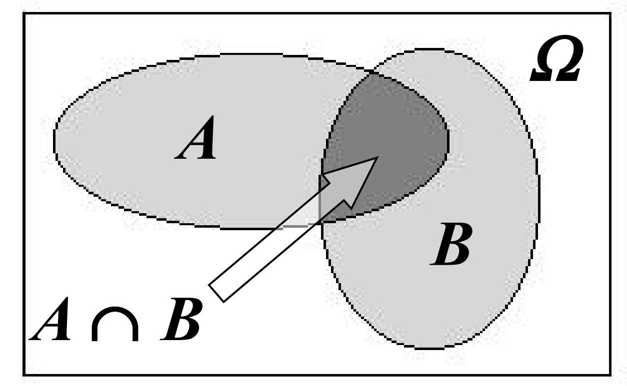
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



Propriedades

- Regra da soma das probabilidades

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Se A e B mutuamente exclusivos, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidade condicional. Ex. de motivação

Condição do peso	Tipo do leite			
	B (B)	C (C)	UHT (U)	Total
dentro das especificações (D)	500	4500	1500	6500
fora das especificações (F)	30	270	50	350
Total	530	4770	1550	6850

$$P(F) = \frac{350}{6850} = 0,051$$

$$P(F|U) = \frac{50}{1550} = 0,032$$

Notar que:

$$P(F|U) = \frac{50}{1550} = \frac{50/6850}{1550/6850} = \frac{P(F \cap U)}{P(U)}$$

Probabilidade condicional

- Sejam *A* e *B* eventos quaisquer, sendo $P(B) > 0$. Definimos a *probabilidade condicional de A dado B* por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade condicional. Exemplo

- Seja o lançamento de 2 dados não viciados e a observação das faces voltadas para cima. Calcule a probabilidade de ocorrer faces iguais, sabendo-se que a soma é menor ou igual a 5.

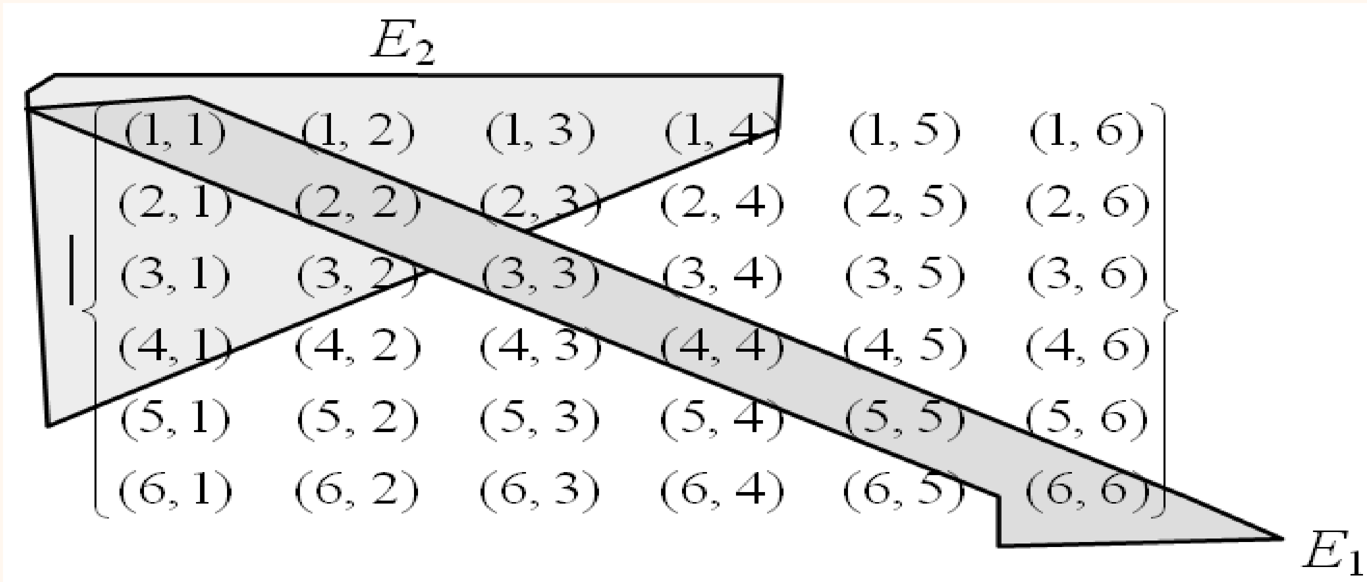
$$OMEGA=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

E_1 = *faces iguais* = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)} e

E_2 = *soma das faces é menor ou igual a 5* =

= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}.

Probabilidade condicional. Exemplo



$$P(E_1|E_2)=\frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}=\frac{2/36}{10/36}=\frac{2}{10}=0{,}2$$

BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Regra do produto

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$$

ou

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$$

Eventos independentes

- Dois ou mais eventos são **independentes** quando a ocorrência de um dos eventos não influencia a probabilidade da ocorrência dos outros. Nesse caso:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B|A) = P(B)$$

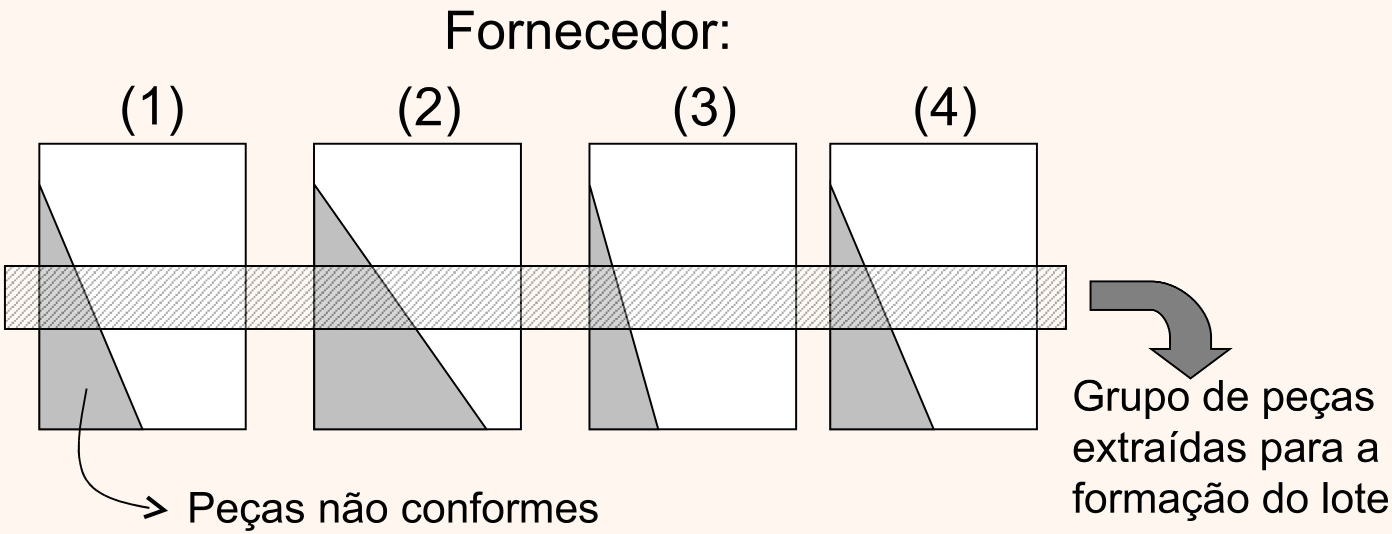
A e B são independentes

$$\Updownarrow$$

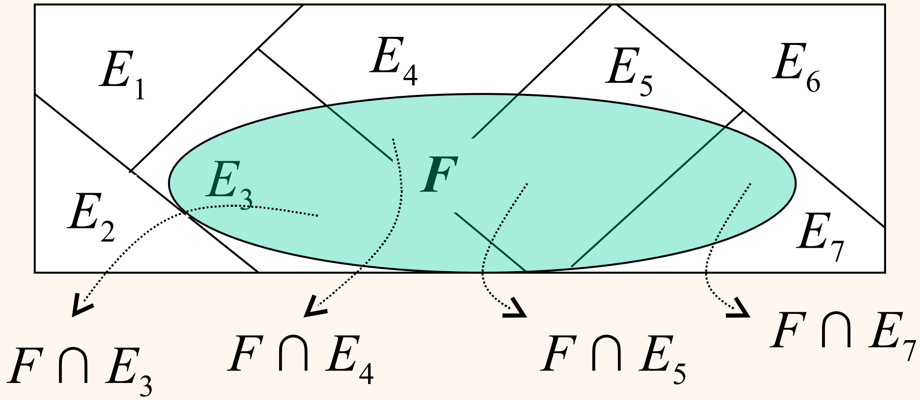
$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Teorema da probabilidade total

- Ilustração da formação de um lote de peças provindas de 4 fornecedores



Teorema da probabilidade total

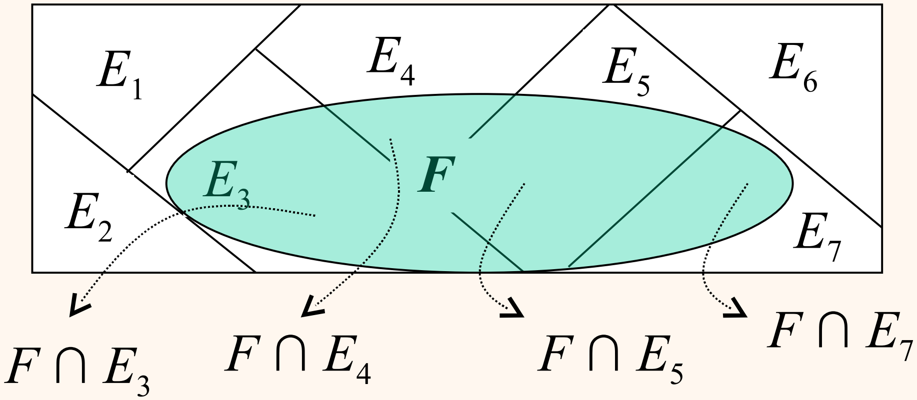


$$F = (F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \ldots \cup (F \cap E_k)$$

$$P(F) = P[(F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \ldots \cup (F \cap E_k)] =$$
$$= P(F \cap E_1) + P(F \cap E_2) + \ldots + P(F \cap E_k)$$

$$\Rightarrow \quad P(F) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) \cdot P(F|E_i)$$

Teorema de Bayes



$$P(E_i|F) = \frac{P(E_i \cap F)}{P(F)}$$

$$\Longrightarrow \quad P(E_i|F) = \frac{P(E_i) \cdot P(F|E_i)}{P(F)}$$