Estatística para Cursos de Engenharia e Informática

Pedro Alberto Barbetta / Marcelo Menezes Reis / Antonio Cezar Bornia

São Paulo: Atlas, 2004

Cap. 5 – Variáveis aleatórias discretas

APOIO:
Fundação de Apoio à Pesquisa Científica e Tecnológica do Estado de Santa Catarina (FAPESC)
Departamento de Informática e Estatística – UFSC (INE/CTC/UFSC)

Variável aleatória

- Uma **variável aleatória** pode ser entendida como uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.
- Exemplos:
  - número de coroas obtido no lançamento de 2 moedas;
  - número de itens defeituosos em uma amostra retirada, aleatoriamente, de um lote;
  - número de defeitos em um azulejo que sai da linha de produção;
  - número de pessoas que visitam um determinado *site*, num certo período de tempo;

Variável aleatória

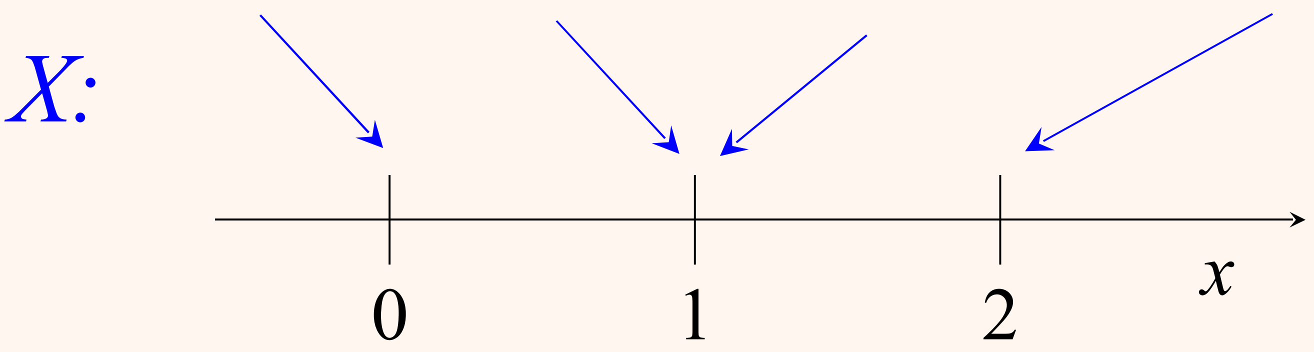
- Uma **variável aleatória** pode ser entendida como uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.
- Exemplos:
  - volume de água perdido por dia, num sistema de abastecimento;
  - resistência ao desgaste de um certo tipo de aço, num teste padrão;
  - tempo de resposta de um sistema computacional;
  - grau de empeno em um azulejo que sai da linha de produção.

Variável aleatória

- Formalmente, uma **variável aleatória** é uma função que associa elementos do espaço amostral ao conjunto de números reais.

X = número de coroas obtido no lançamento de 2 moedas

$$\Omega = \{(cara,\ cara),\ (cara,\ coroa),\ \{coroa,\ cara),\ (coroa,\ coroa)\}$$



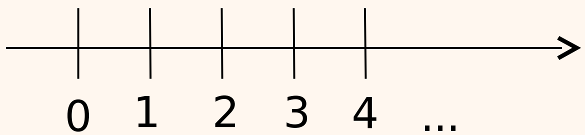
Variável aleatória

variável aleatória

discreta

os possíveis resultados estão contidos em um conjunto finito ou enumerável

Ex.



número de defeitos em ...

contínua

os possíveis resultados abrangem todo um intervalo de números reais

Ex.

tempo de resposta de ...

Variável aleatória discreta: função de probabilidade

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

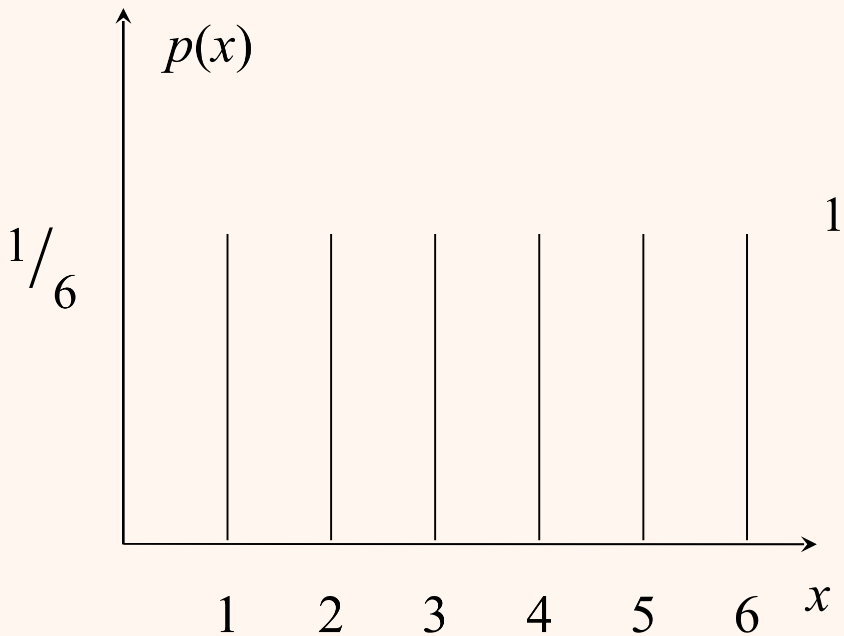
satisfazendo:

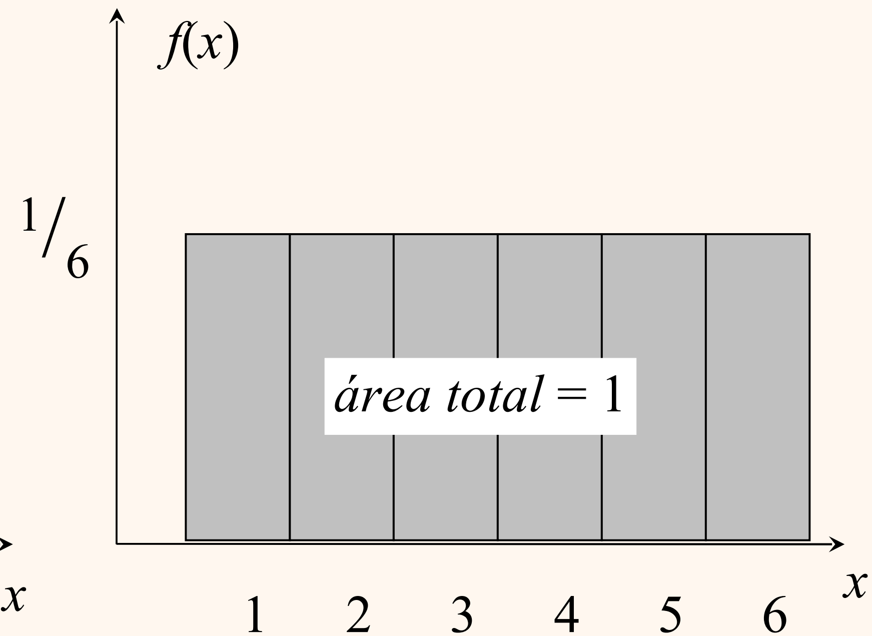
$$p(x_i) \geq 0$$

$$\sum_i p(x_i) = 1$$

Variável aleatória discreta: função de probabilidade

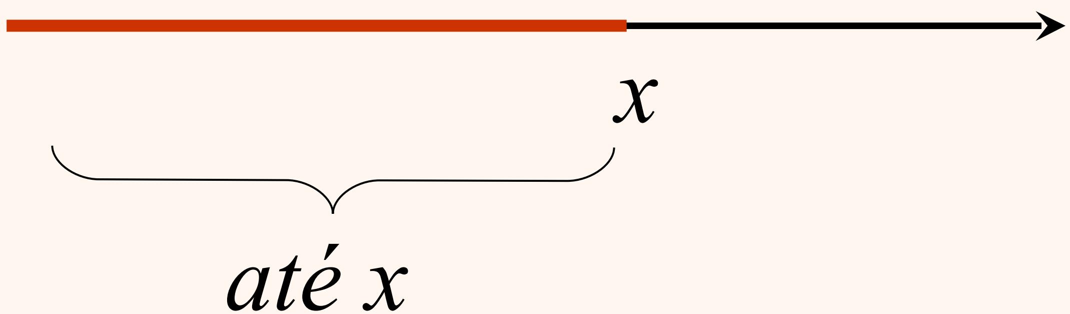
- **X** = número obtido no lançamento de um dado comum.





Variável aleatória discreta: Função de distribuição acumulada

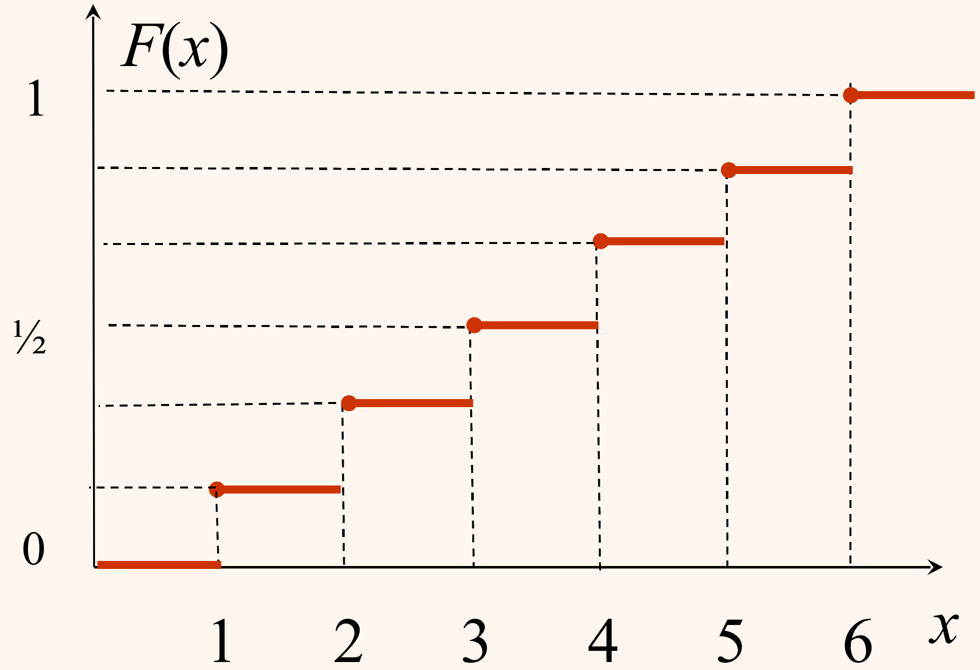
$$F(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \Re$$



Variável aleatória discreta: Função de distribuição acumulada

- **X** = número obtido no lançamento de um dado comum.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1/6 & \text{se } 1 \le x < 2 \\ 2/6 & \text{se } 2 \le x < 3 \\ 3/6 & \text{se } 3 \le x < 4 \\ 4/6 & \text{se } 4 \le x < 5 \\ 5/6 & \text{se } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{se } x \ge 6 \end{cases}$$



BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Variável aleatória discreta: Valor esperado

Valores possíveis	Probabi-lidades
x_1 x_2 x_3 ... x_k	p_1 p_2 p_3 ... p_k
Total	1

$$\mu = E(X) = \sum_{j=1}^{k} x_j p_j$$

Variável aleatória discreta: Variância

Valores possíveis	Probabi-lidades
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
...	...
x_k	p_k
Total	1

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{j=1}^{k} (x_j - \mu)^2 p_j$$

ou:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

onde: $E(X^2) = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 p_j$

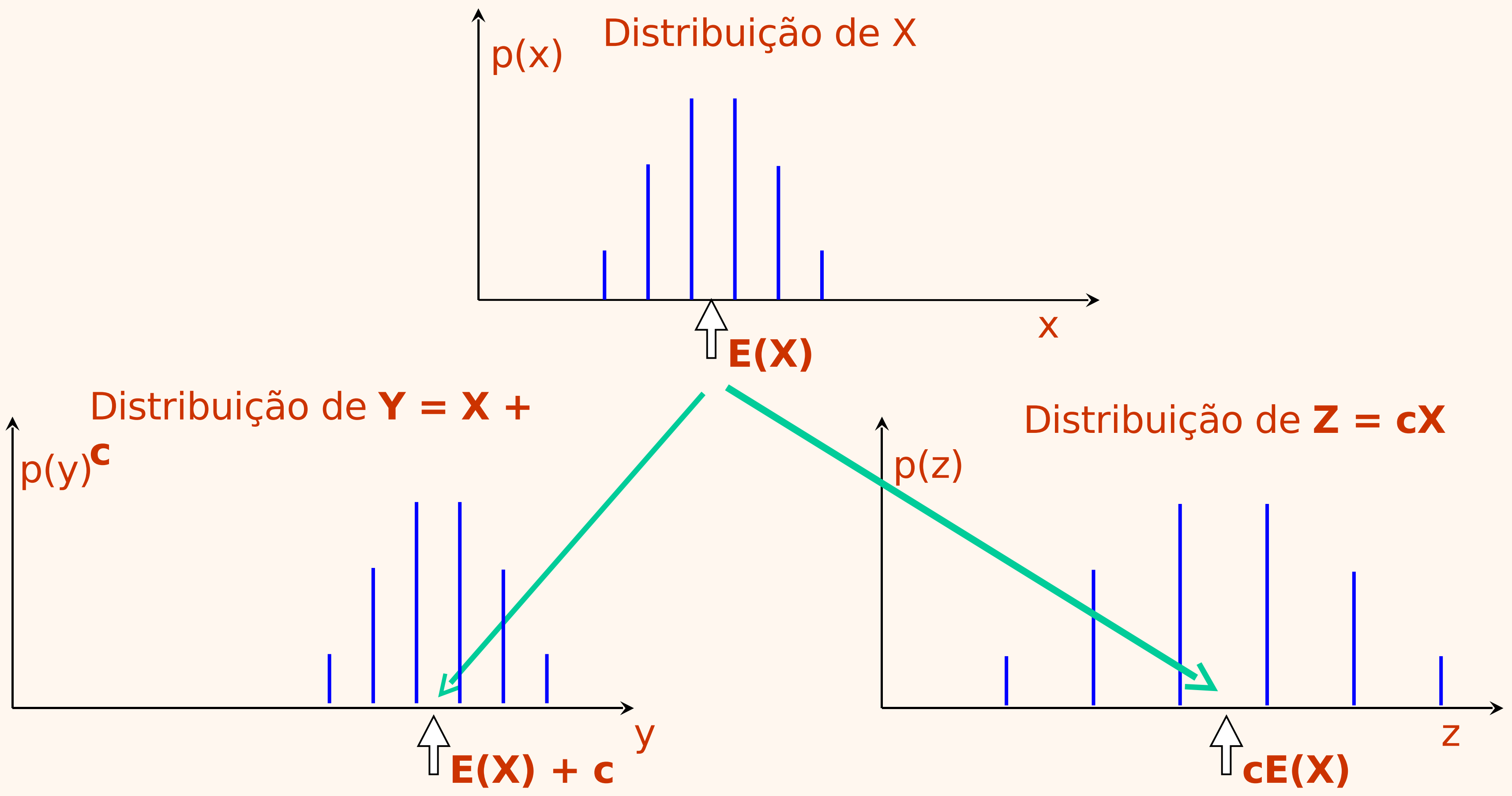
Desvio padrão:

$$\sigma = DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Propriedades do valor esperado e variância

• $E(c) = c$	• $V(c) = 0$
• $E(X + c) = E(X) + c$	• $V(X + c) = V(X)$
• $E(cX) = cE(X)$	• $V(cX) = c^2 V(X)$
• $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$	• $DP(cX) = \|c\| DP(X)$
• $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$	

Propriedades do valor esperado e variância



Variáveis aleatórias independentes

- $X1$, $X2$, ..., Xn podem ser consideradas **variáveis aleatórias independentes** se o conhecimento de uma não altera as distribuições de probabilidades das demais.

- Vale para **variáveis aleatórias independentes**:

  V(X + Y) = V(X) + V(Y)

  V(X – Y) = V(X) + V(Y)

Modelos discretos

- **Distribuição de Bernoulli**
  de parâmetro p (0 < p < 1)

$$E(X) = p$$

x	$p(x)$
0	$1-p$
1	p
Total	1

$$V(X) = p.(1-p)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1-p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Modelos discretos

- **Distribuição Binomial**

$$\boldsymbol{X} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

onde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, sendo cada uma delas com distribuição de Bernoulli de parâmetro p constante ($0 < p < 1$).

Ou seja,

Modelos discretos

- **Distribuição Binomial**

  - ***X*** = número de sucessos em n ensaios
  - ensaios independentes e
  - com P{sucesso} = p,

  constante para todo ensaio ($0 < p < 1$).

Modelos discretos

- **Distribuição Binomial, n = 4:**

			SSFF		
			SFSF		
		SFFF	*SFFS*	*SSSF*	
		FSFF	*FSSF*	*SSFS*	
		FFSF	*FSFS*	*SFSS*	
	FFFF	*FFFS*	*FFSS*	*FSSS*	*SSSS*
Valores de **X**:	0	1	2	3	4
Probab.:	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

Modelos discretos

- **Distribuição Binomial**

$$p(x) = \binom{n}{x} . p^{x} . (1 - p)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, ..., n)$$

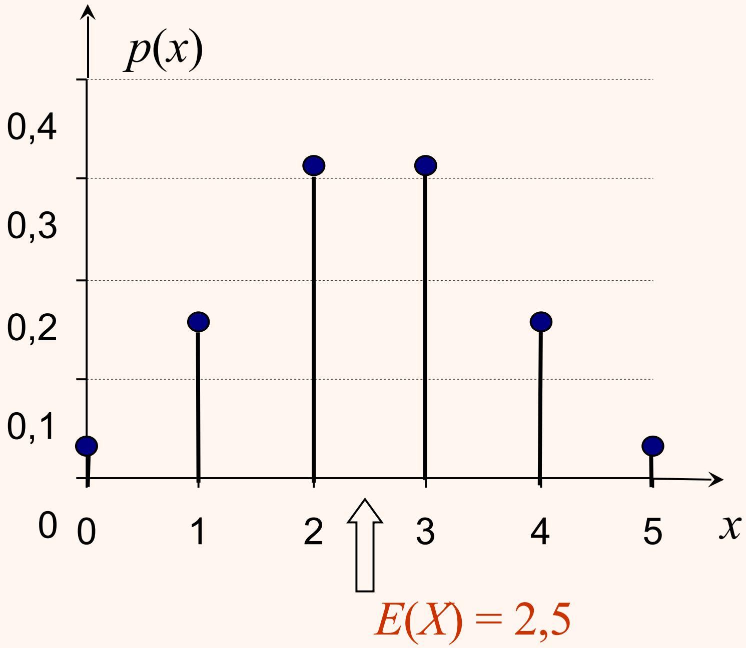
$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\, x!}$$

$$E(X) = n.p \qquad V(X) = n.p.(1 - p)$$

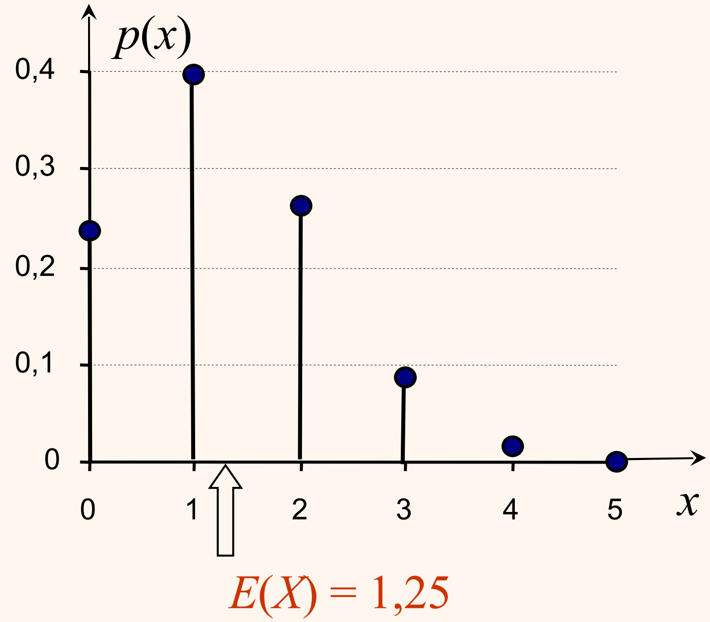
Modelos discretos

- **Distribuição Binomial**

binomial com n = 5 e p = 0,5



binomial com n = 5 e p = 0,25



Modelos discretos

- **Ex. 5.2 - Binomial n = 10 e p = 0,7**

Tabela da binomial

n	x	0,70
10	0	0,0000
	1	0,0001
	2	0,0014
	3	0,0090
	4	0,0368
	5	0,1029
	6	0,2001
	7	0,2668
	8	0,2335
	9	0,1211
	10	0,0282

$\boxed{X > 5}$

- Qual a probabilidade da maioria também acessar a p24?

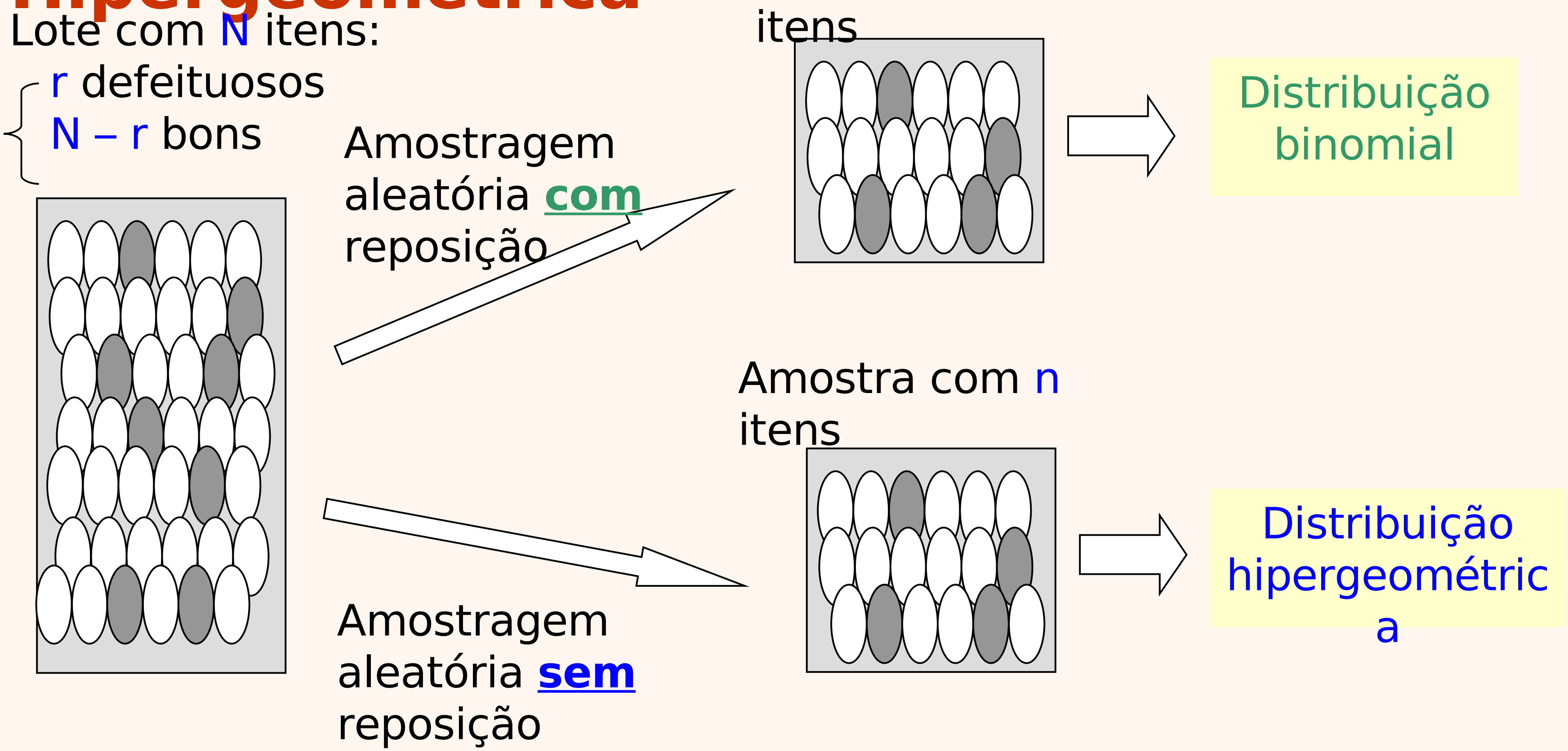
- **P(X > 5) =**

  = p(6) + p(7) + p(8) + p(9) + + p(10)

  = 0,8497

Modelos discretos

- **Distribuição Hipergeométrica**



Modelos discretos

- **Distribuição Hipergeométrica**

$$p(x) = \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad [x = 0,\ 1,\ \ldots,\ min(r,\ n)]$$

$$E(X) = n.p$$

$$V(X) = n.p.(1-p).\ \frac{N-n}{N-1} \qquad (p = r/N)$$

Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson**
  - Na prática, muitas situações nas quais interessa o número de observações de uma variável em um intervalo contínuo (tempo ou espaço) podem ser convenientemente explicadas pela distribuição de Poisson. Exemplos:
    - chamadas telefônicas por minuto,
    - mensagens que chegam a um servidor por segundo
    - acidentes por dia,
    - defeitos por m2, etc..

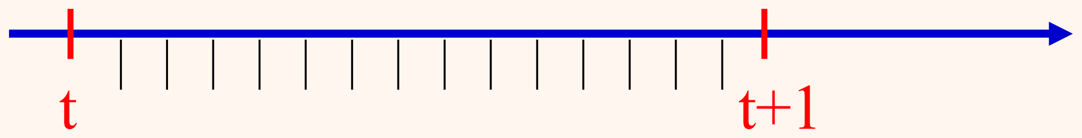
Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson. Suposições:**
  - Os números de ocorrências em quaisquer intervalos são **independentes**.
  - A probabilidade de duas ou mais ocorrências simultâneas é **zero**.
  - O número médio de ocorrências (λ) é **constante** em todo o intervalo considerado.

Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson. Uma justificativa:**

X = núm. de ocorrências em [t, t+1]



n intervalos de amplitude 1/n, com n ∞

p = probab. de ocorrência em cada intervalo

$$P(X=x)\approx\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

n ∞
p 0
n p λ > 0

$$P(X=x)\to\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$$

(x = 1, 2, ...)

Modelos discretos

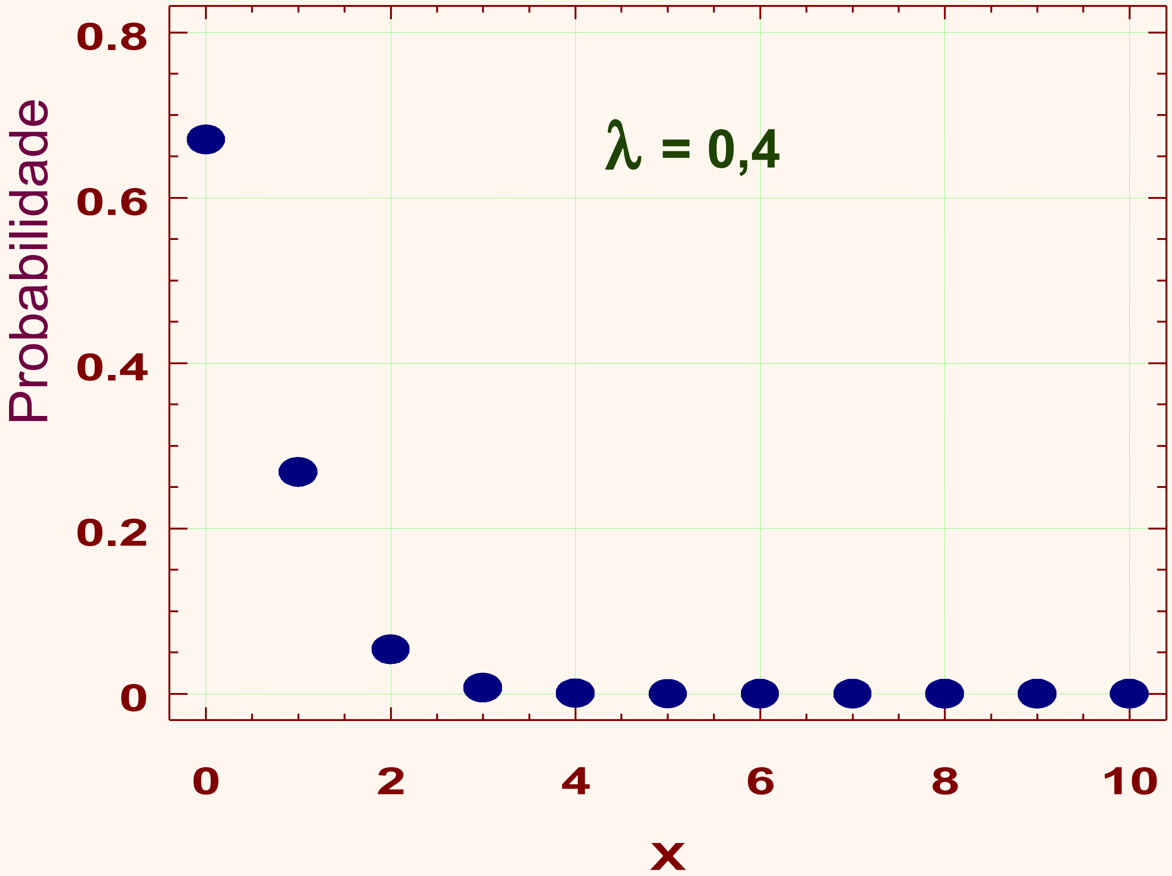
- **Distribuição de Poisson**

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson**



Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson**