

Estatística para Cursos de Engenharia e Informática

Pedro Alberto Barbetta / Marcelo Menezes Reis / Antonio Cezar Bornia
São Paulo: Atlas, 2004

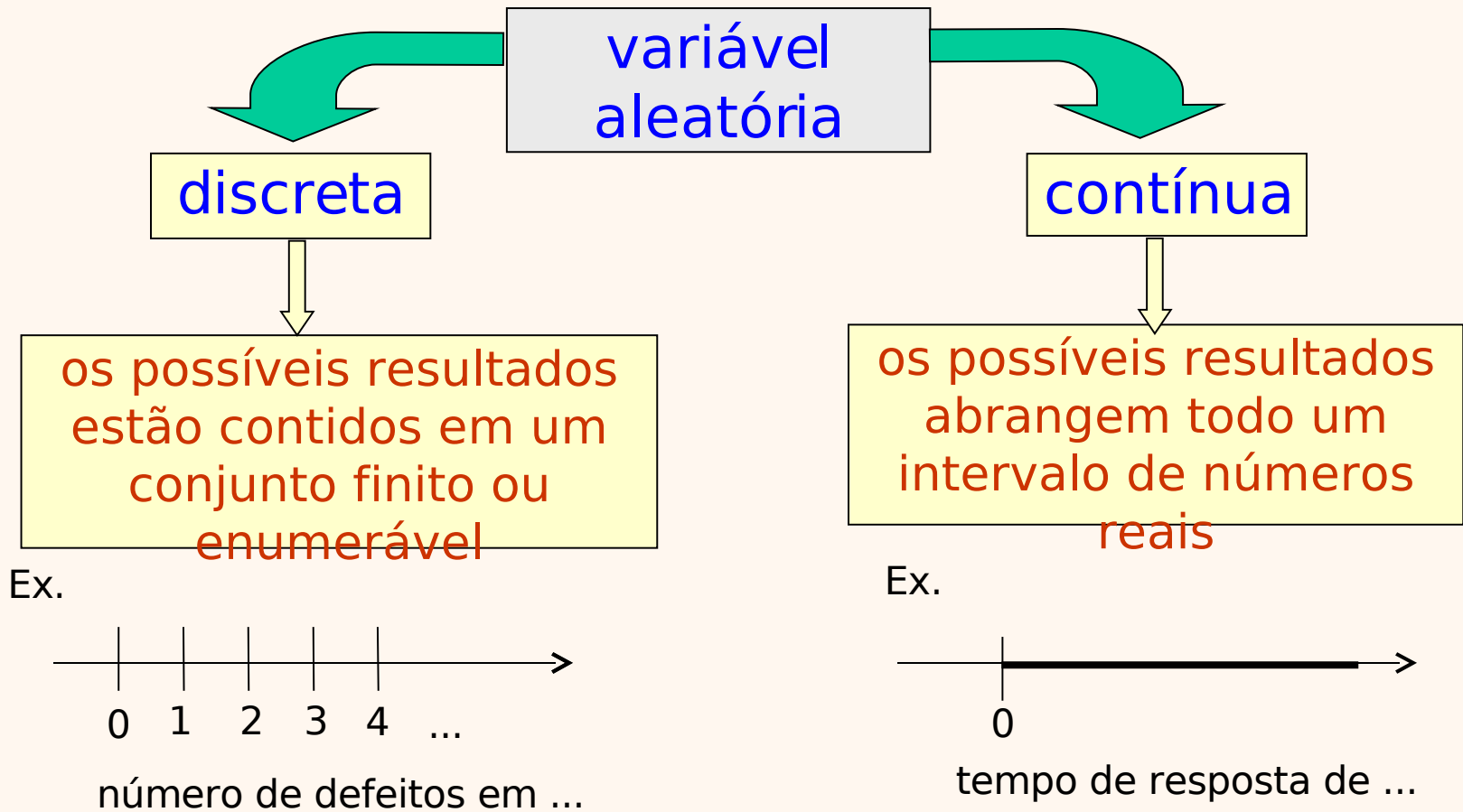
Cap. 6 – Variáveis aleatórias contínuas

APOIO:

Fundação de Apoio à Pesquisa Científica e Tecnológica do Estado de Santa Catarina (FAPESC)

Departamento de Informática e Estatística – UFSC (INE/CTC/UFSC)

Variável aleatória

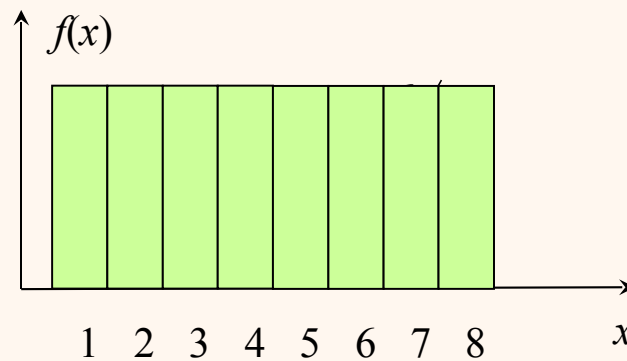
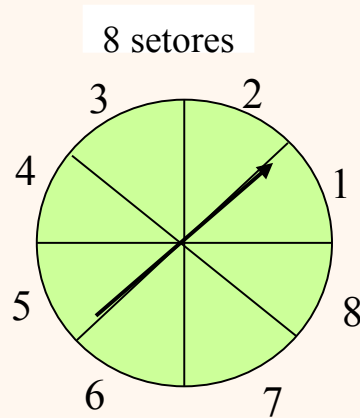
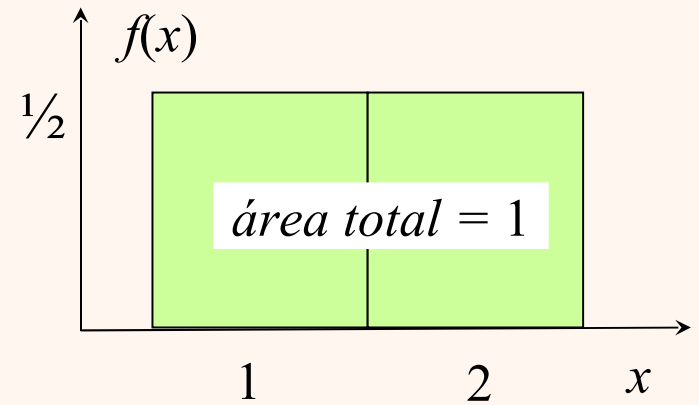
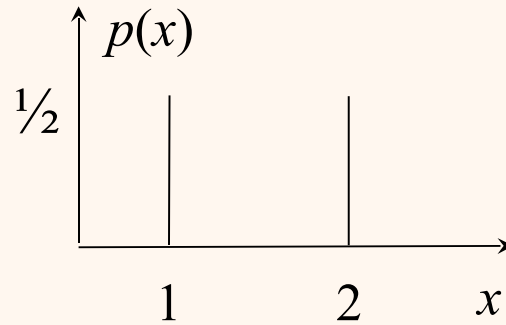
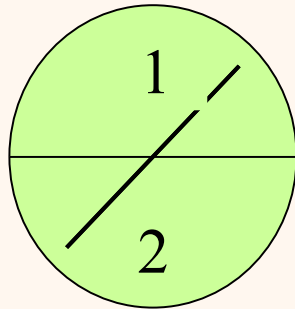


Variáveis aleatórias contínuas

- tempo de resposta de um sistema computacional;
 - rendimento de um processo químico;
 - tempo de vida de um componente eletrônico;
 - resistência de um material; etc.
- Variáveis aleatórias discretas com grande número de possíveis resultados (podem ser aproximadas para contínuas):
 - número de transações por segundo de uma CPU;
 - número de defeitos numa amostra de 5.000 itens; etc.

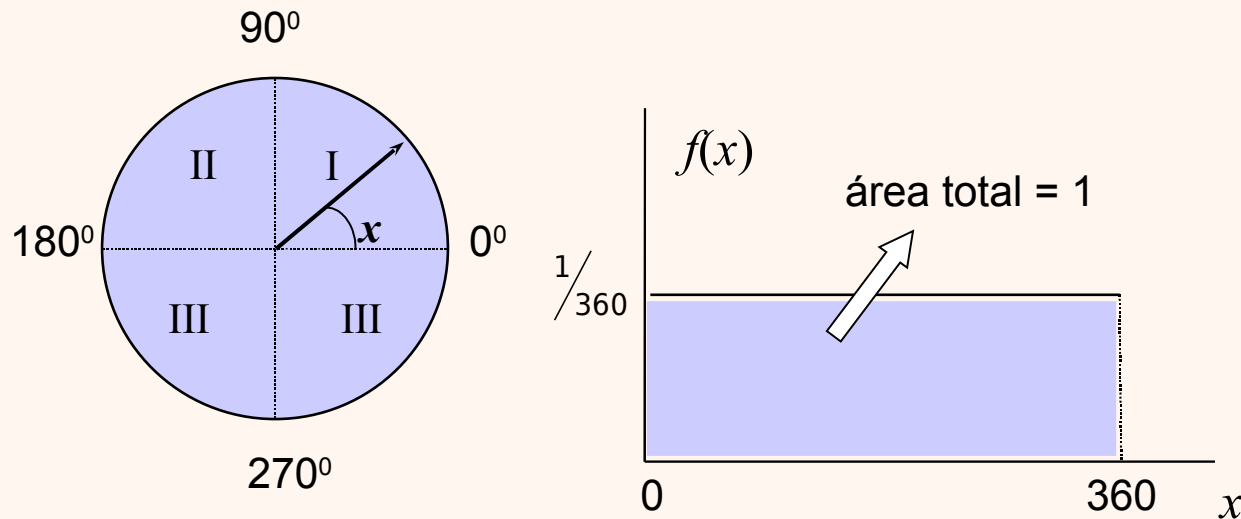
Variável aleatória: discreta x contínua

Discreta

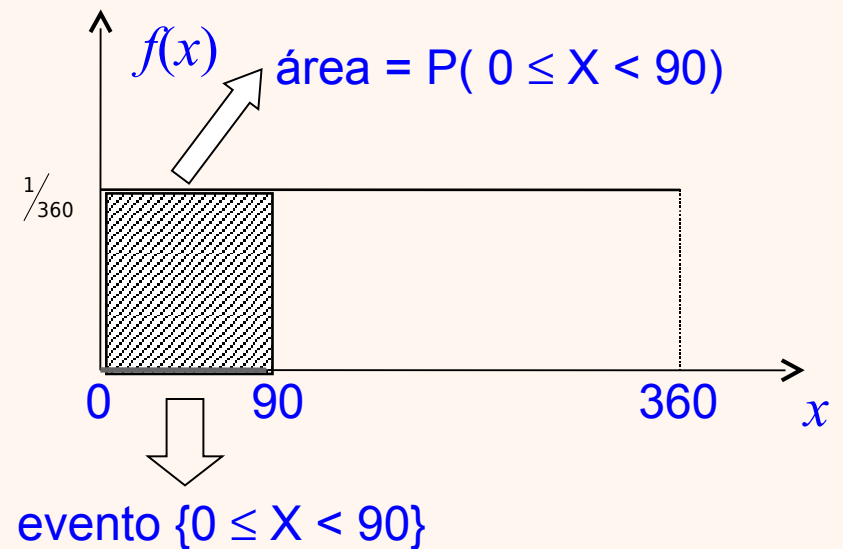
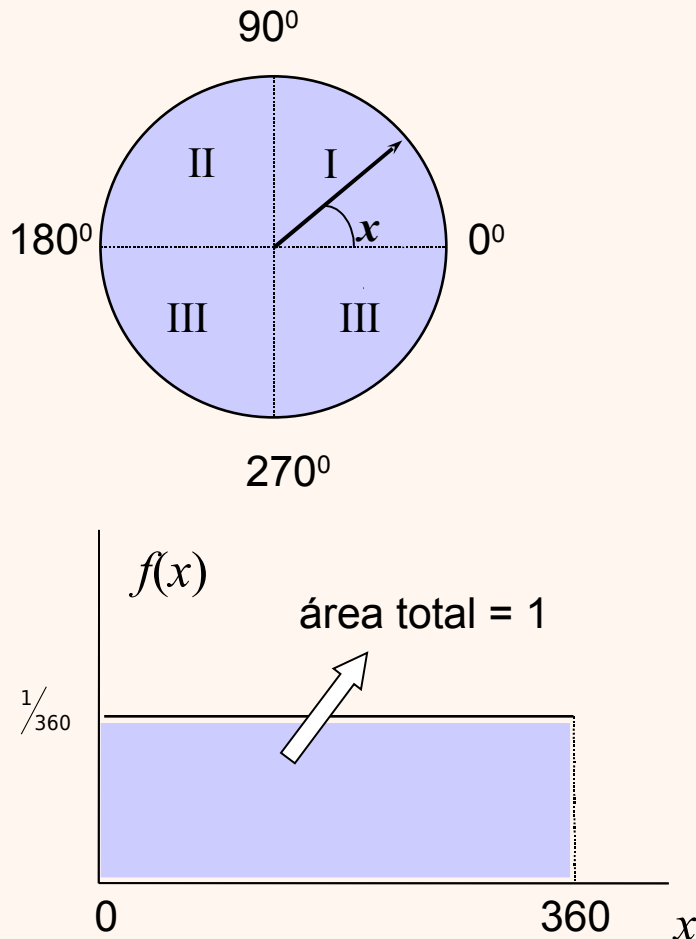


Variável aleatória: discreta x contínua

Contínua



Variável aleatória contínua



Variável aleatória contínua

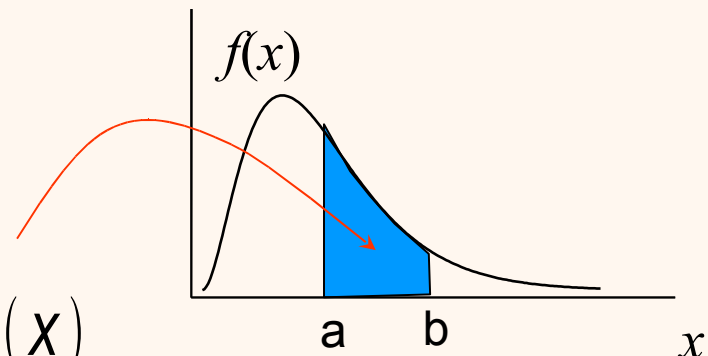
- As probabilidades de eventos associados a uma variável aleatória contínua X podem ser calculadas através de uma **função densidade de probabilidade** f , que deve satisfazer:

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d(x) = 1$$

Se $A = [a, b]$, então

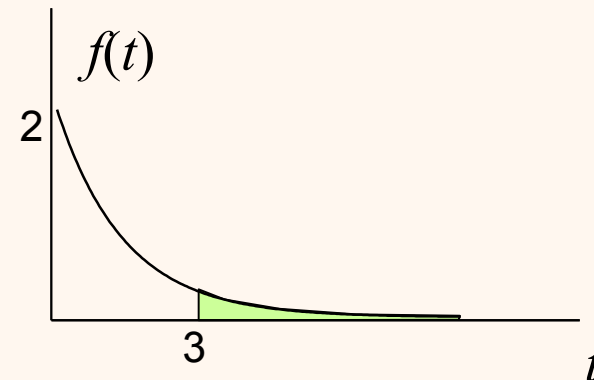
$$P(A) = \int_a^b f(x) d(x)$$



Variável aleatória contínua

- Exemplo 6.3

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2t}, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$$



$$P(T > 3) = \int_3^{+\infty} f(t) dt = \int_3^{+\infty} 2e^{-2t} dt = 2 \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_3^{+\infty} = 0 + e^{-2(3)} = e^{-6}$$

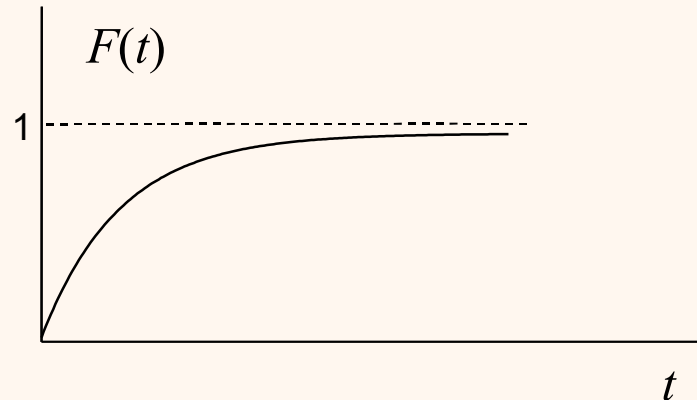
Variável aleatória contínua

- Função de distribuição acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds, \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

- Exemplo 6.3

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t}, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$$



Variável aleatória contínua

- Valor esperado e variância

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad \text{ou} \quad V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

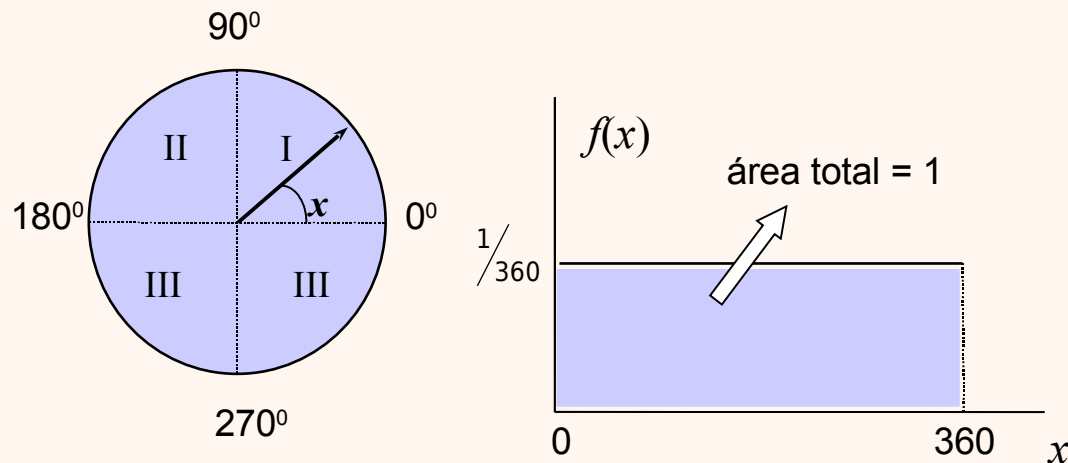
onde: $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

Principais Modelos Contínuos

Distribuição uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \text{para } x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & \text{para } x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

- Exemplo:

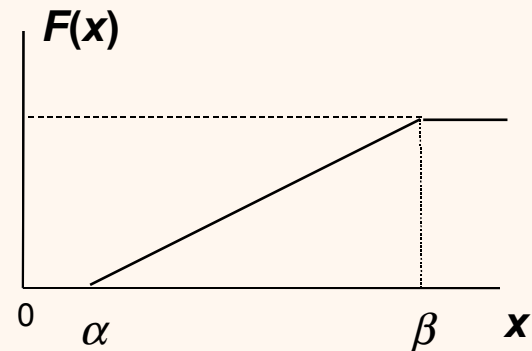
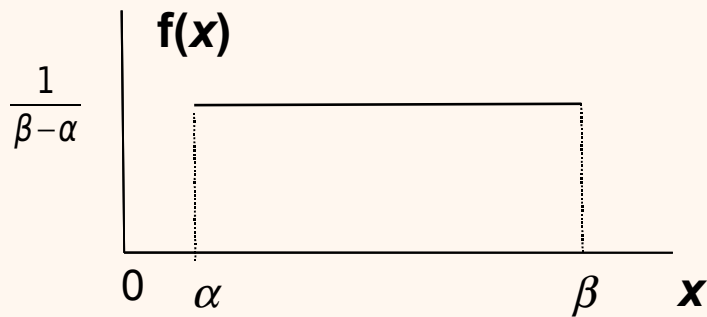


Principais Modelos Contínuos

Distribuição uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \text{para } x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & \text{para } x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \text{para } \alpha \leq x < \beta \\ 1, & \text{para } x \geq \beta \end{cases}$$

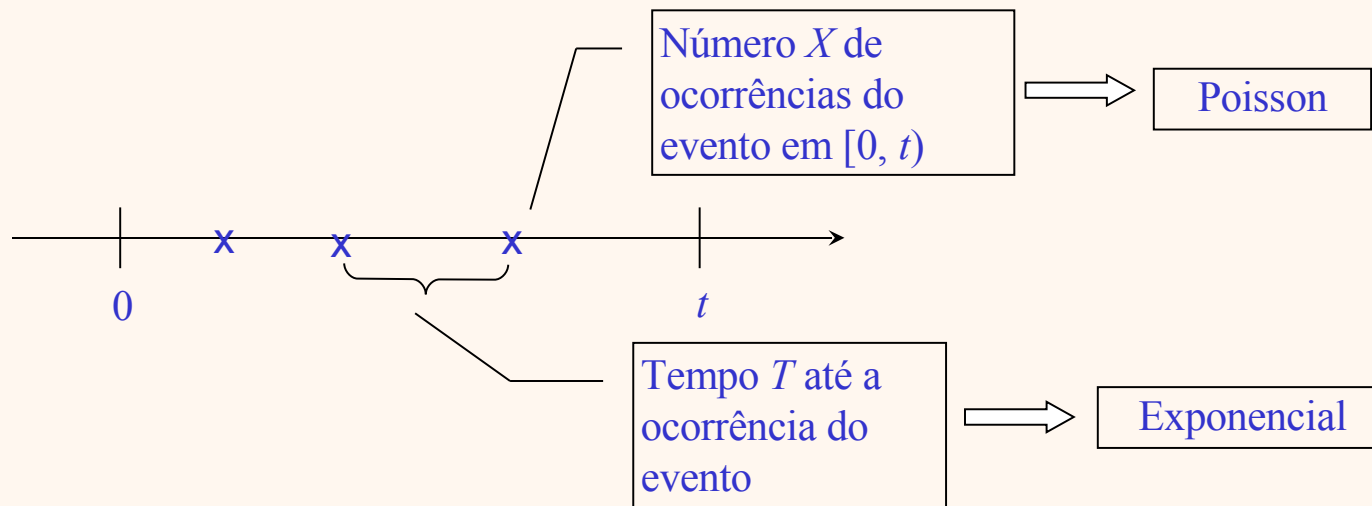


$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad V(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Principais Modelos Contínuos

Distribuição exponencial

- Exemplos:
 - tempo (em minutos) até a próxima consulta a uma base de dados;
 - tempo (em segundos) entre pedidos a um servidor;
 - distância (em m) entre defeitos de uma fita.



Principais Modelos Contínuos

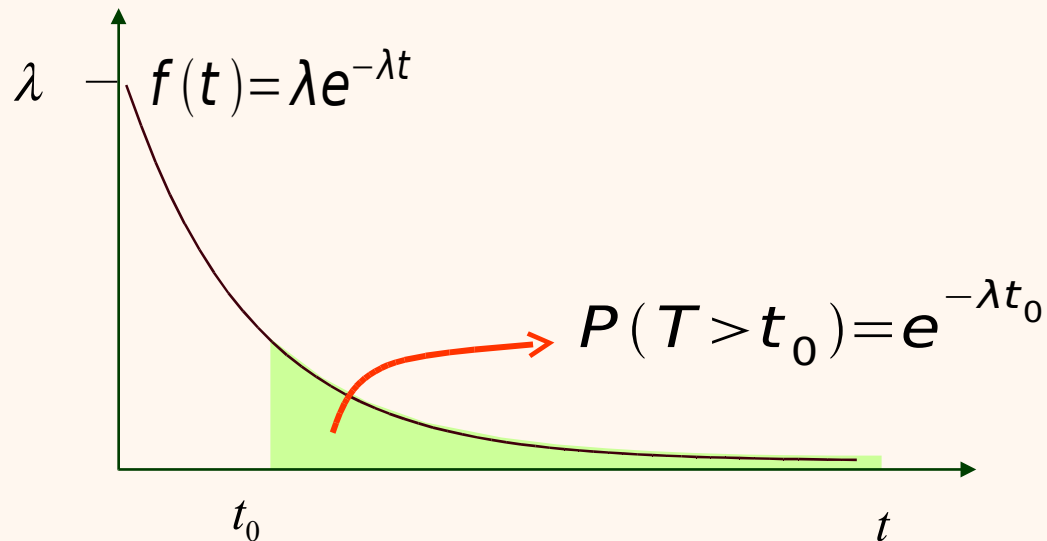
Distribuição exponencial

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$



Principais Modelos Contínuos

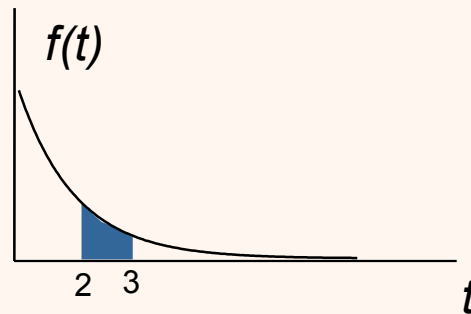
Distribuição exponencial

- Exemplo 6.3

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2t}, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

$$P(2 \leq T \leq 3) = ?$$

Resp.



$$P(2 \leq T \leq 3) = \int_2^3 2e^{-2t} dt \quad \text{ou}$$

$$P(2 \leq T \leq 3) = P(T \geq 2) - P(T > 3) = e^{-2(2)} - e^{-2(3)} = e^{-4} - e^{-6} = 0,0158$$

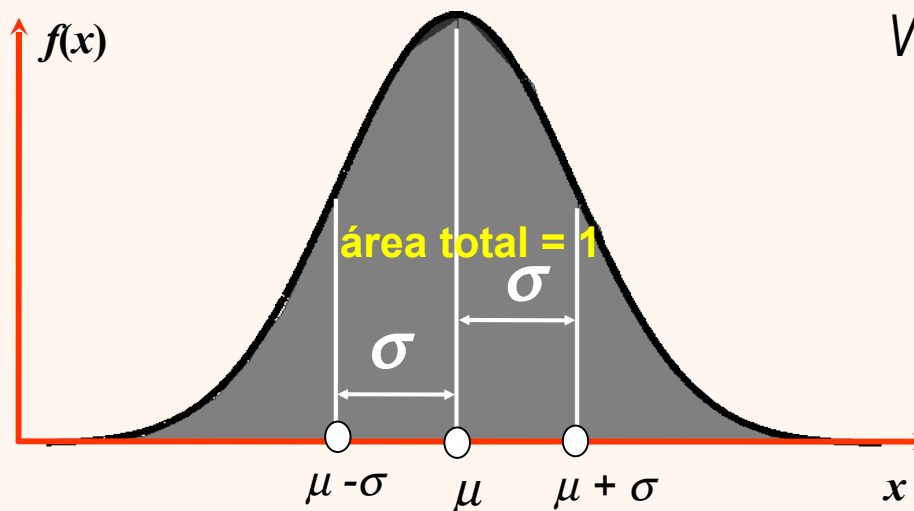
Principais Modelos Contínuos

Distribuição normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

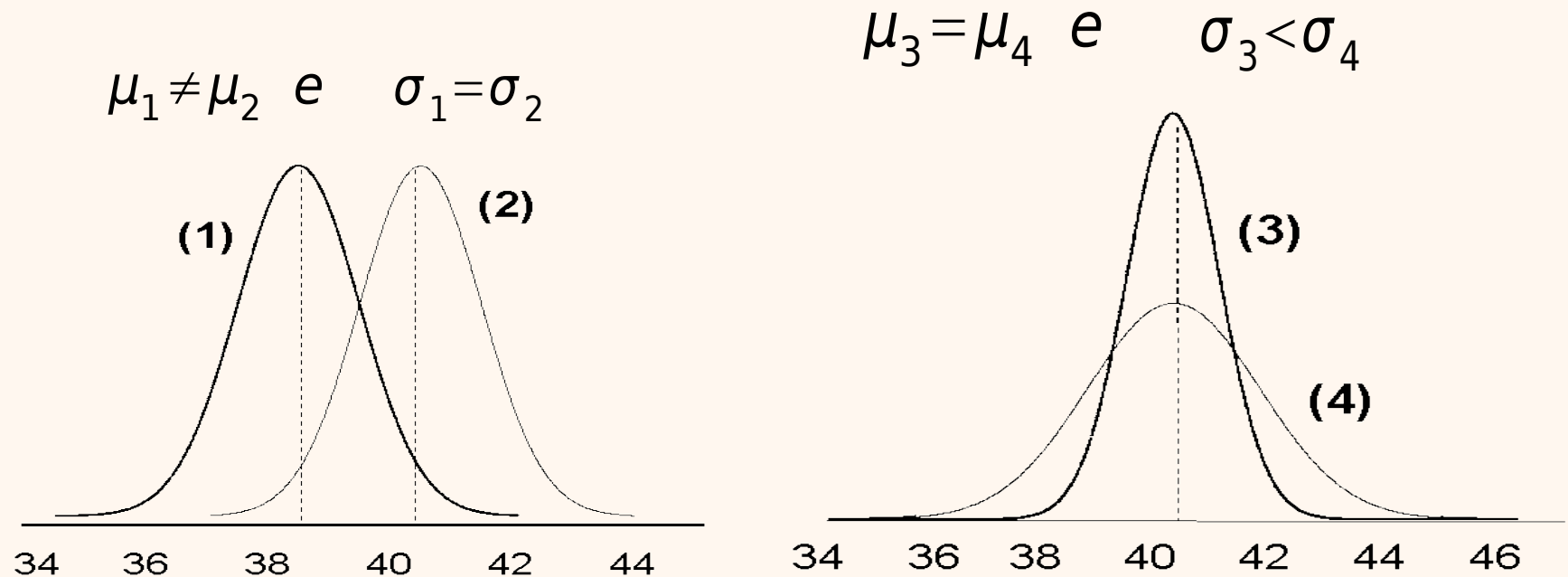
$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$



Principais Modelos Contínuos

Distribuição normal

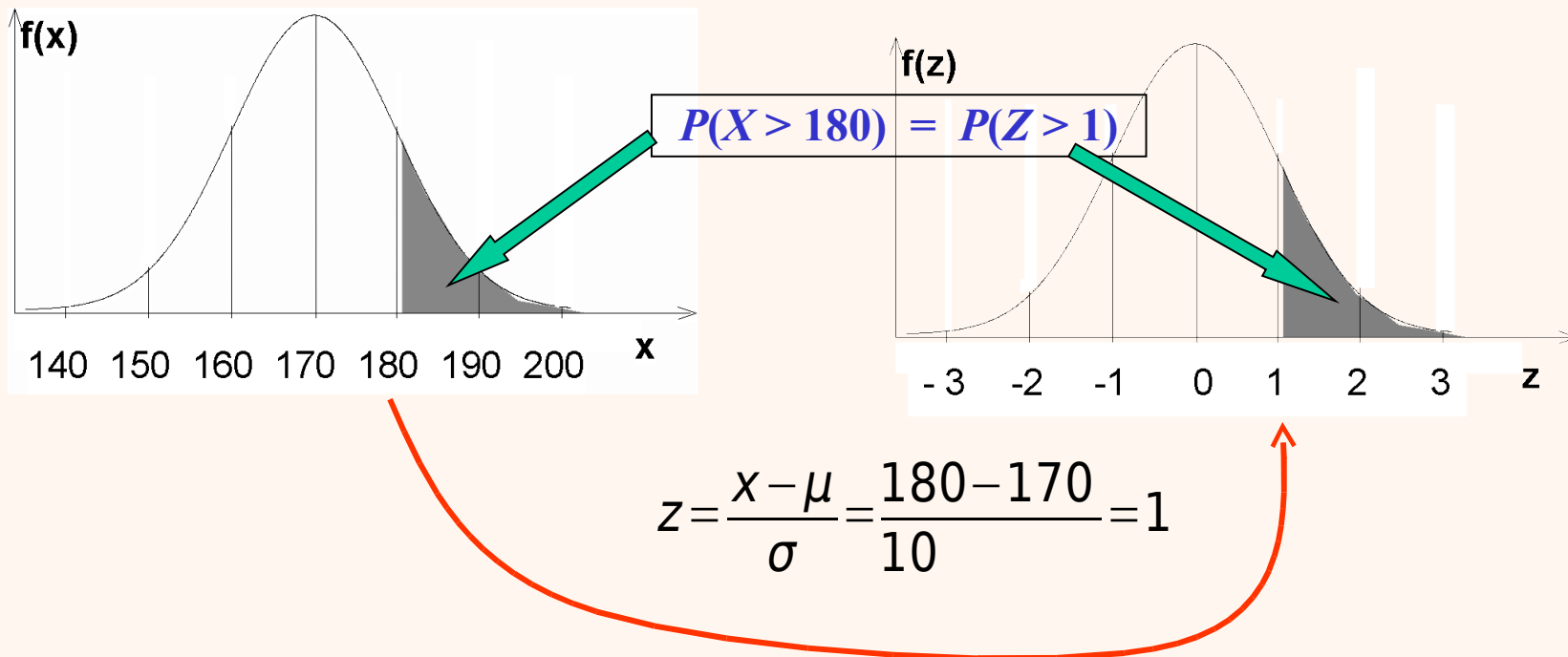


Principais Modelos Contínuos

Distribuição normal padrão

Distribuição de X :
normal com $\mu = 170$ e $\sigma = 10$

Distribuição de Z :
normal padrão

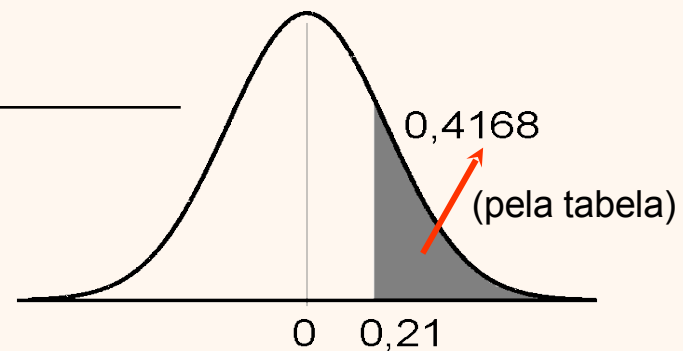


Principais Modelos Contínuos

Tabela da distribuição normal padrão

z	segunda decimal de z				
	0,00	0,01	0,02	...	0,09
0,0					
0,1					
0,2		0,4168			
...					

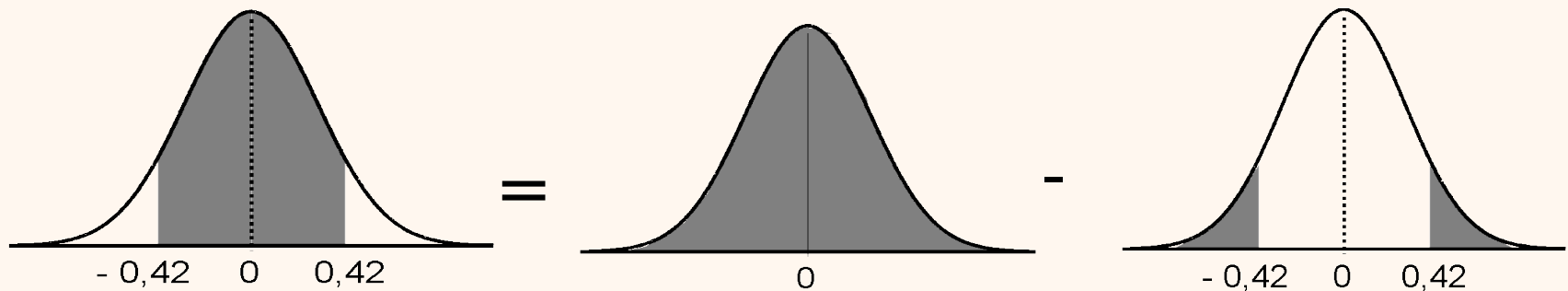
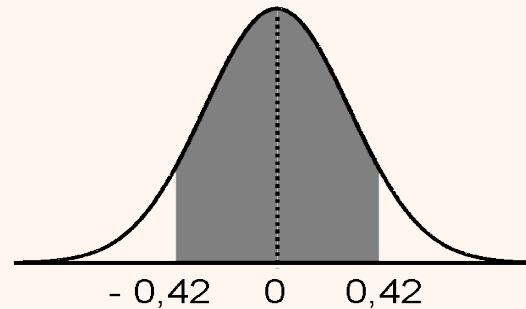
(área na cauda superior)



Principais Modelos Contínuos

Tabela da distribuição normal padrão

$$P(-0,42 < Z < 0,42) = ?$$



$$\text{Então, } P(-0,42 < Z < 0,42) = 1 - 2 (0,3372) = 0,3256$$

A normal como limite de outras distribuições

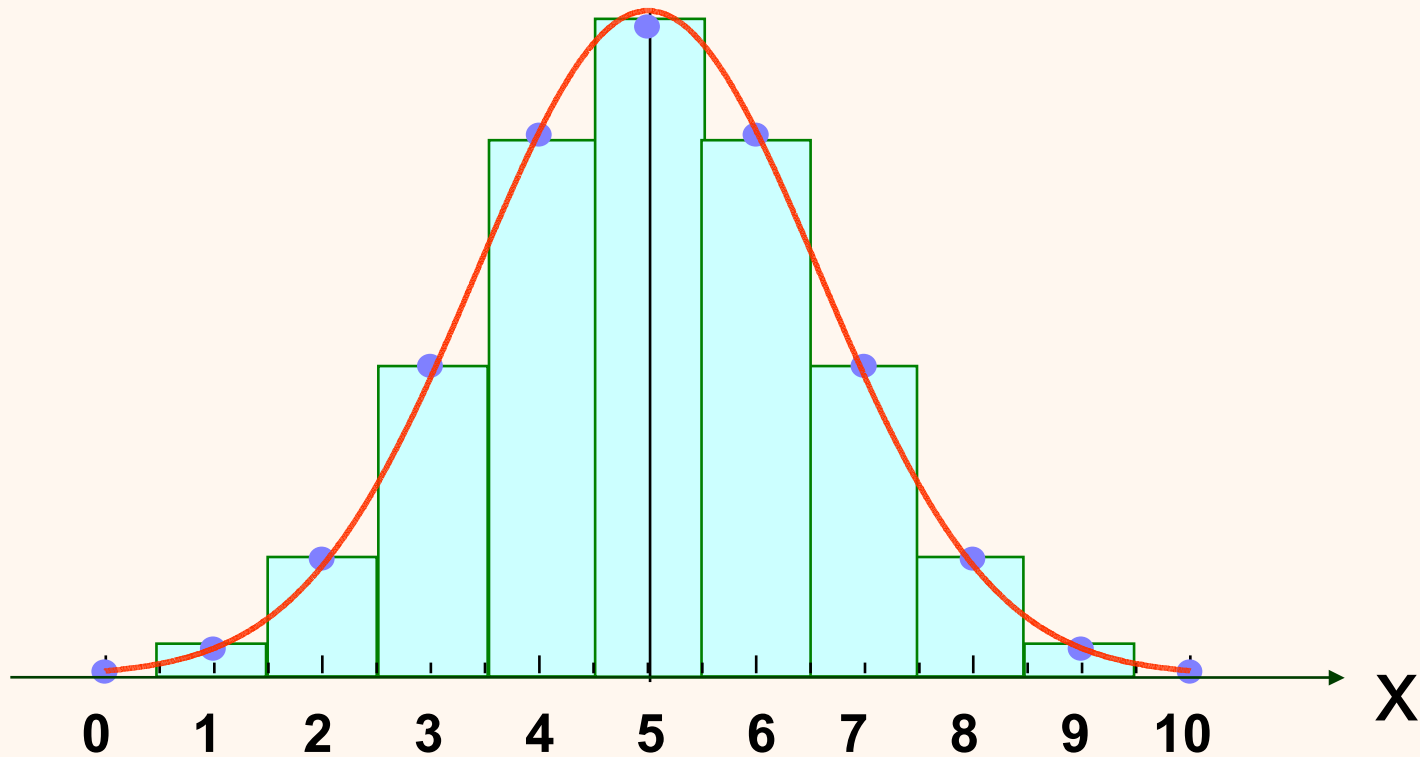
Aproximação normal à binomial

- Condição:
 - n grande e
 - p não muito próximo de 0 (zero) ou de 1 (um).
- Parâmetros:

$$\mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

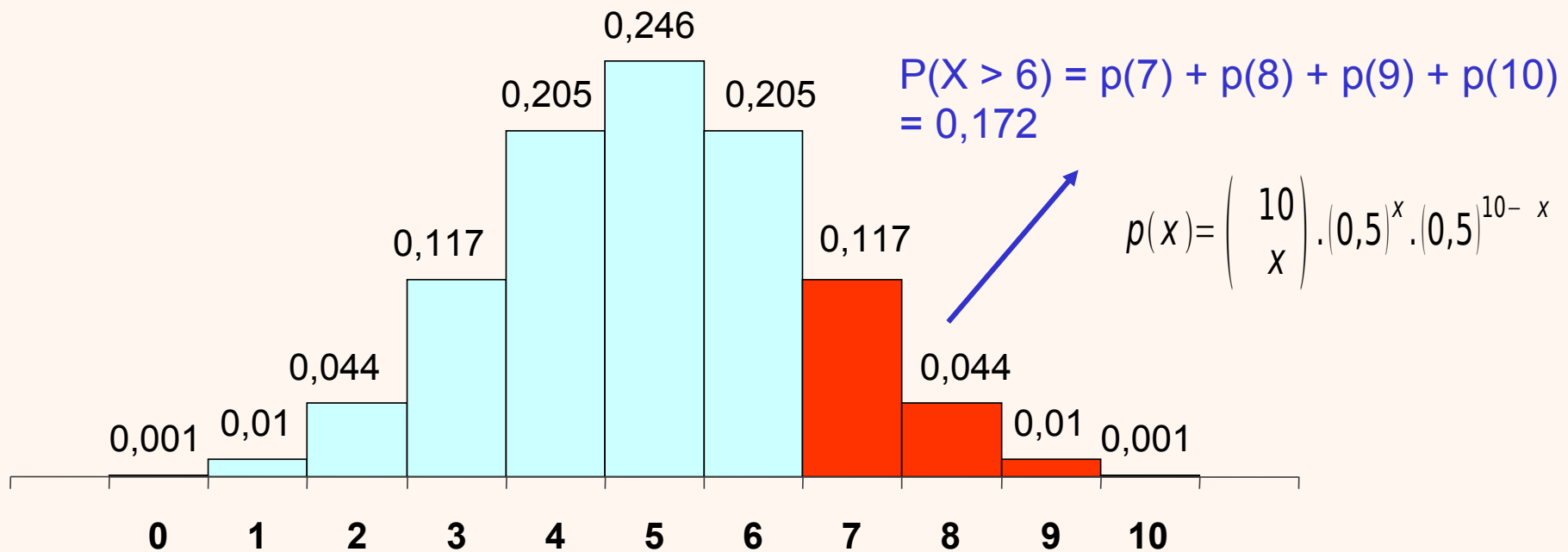
Aproximação normal à binomial



Aproximação normal à binomial

Ex. Qual é a probabilidade de mais de 6 caras em 10 lançamentos de uma moeda “honesta”?

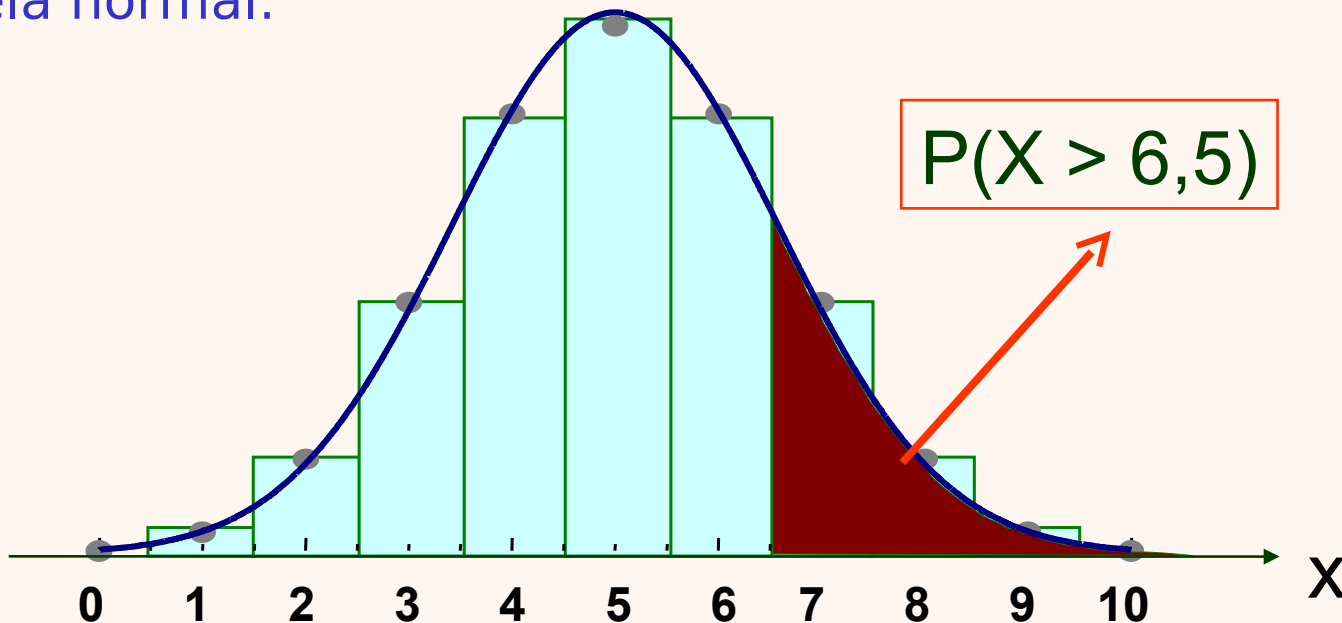
Pela binomial:



Aproximação normal à binomial

Ex. Qual é a probabilidade de mais de 6 caras em 10 lançamentos de uma moeda “honesta”?

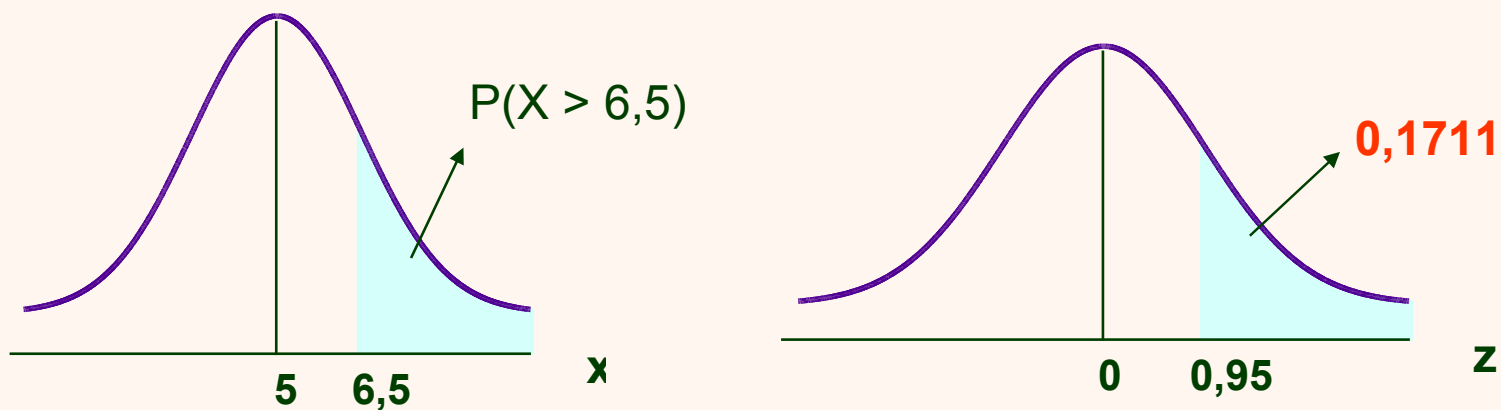
Pela normal:



Aproximação normal à binomial

Ex. Qual é a probabilidade de mais de 6 caras em 10 lançamentos de uma moeda “honesta”?

Pela normal:



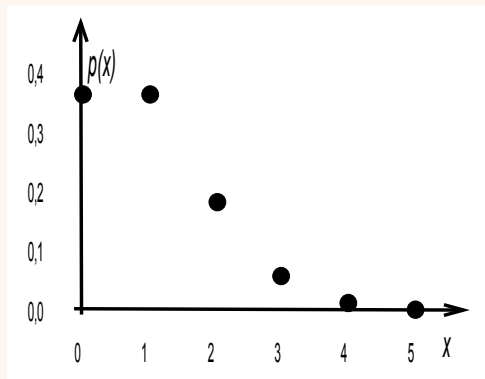
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{6,5 - 5}{\sqrt{2,5}} = 0,95$$

A normal como limite de outras distribuições

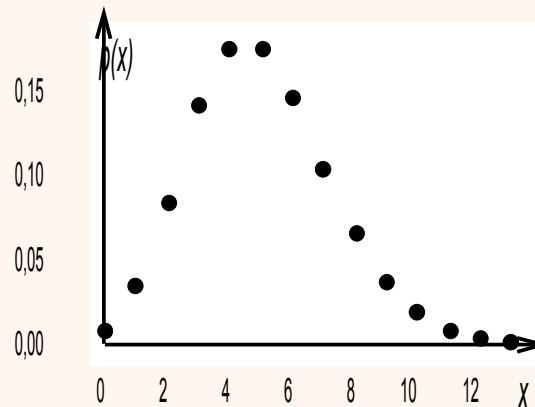
Aproximação normal à Poisson

- Aproximação válida quando λ for grande

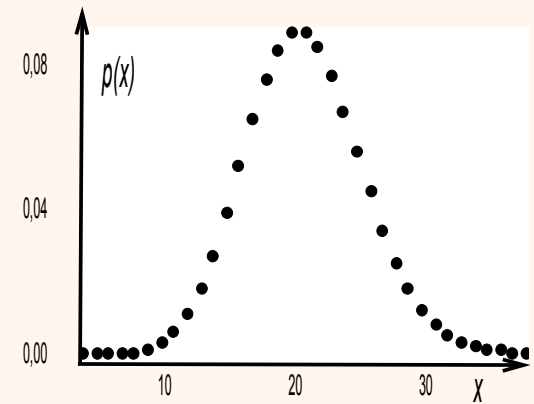
$\lambda = 1$



$\lambda = 5$



$\lambda = 20$



Parâmetros da normal:

$$\mu = \lambda$$
$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

Gráfico de probabilidade normal

- Ex. Dados: 74,0; 74,4; 74,7; 74,8; 75,9

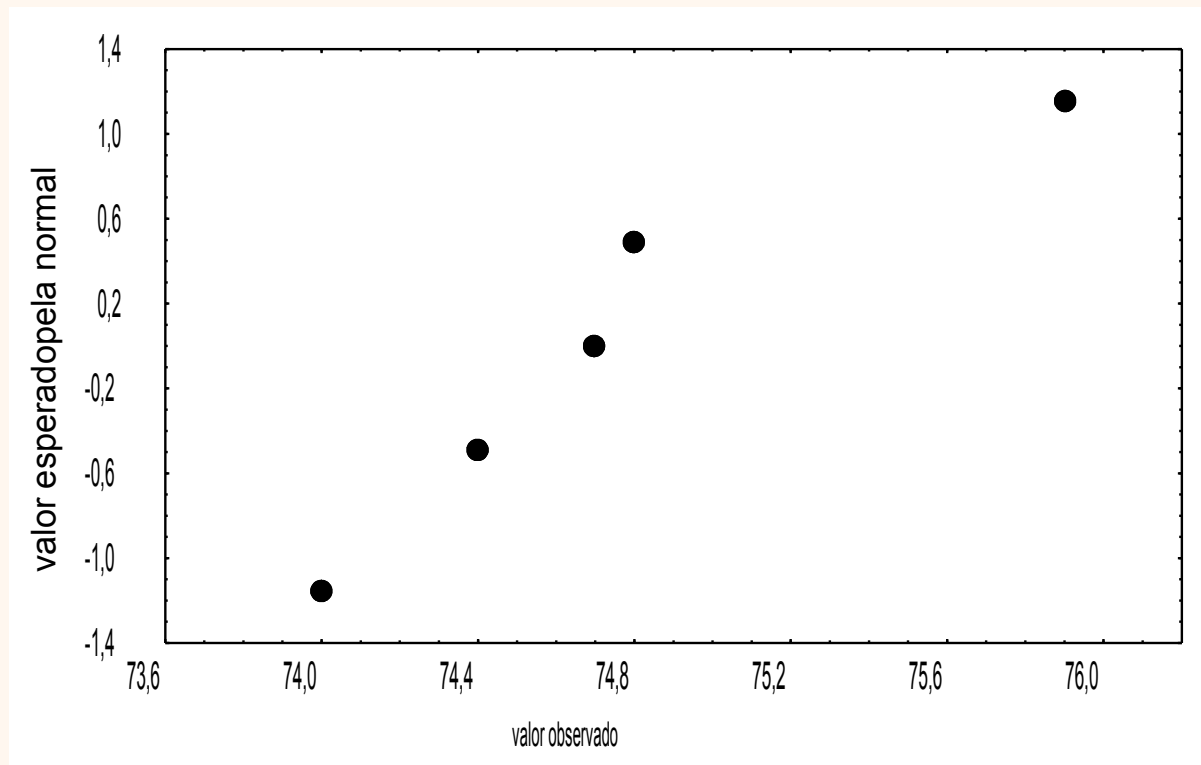


Gráfico de probabilidade normal

- Dados com distribuição normal

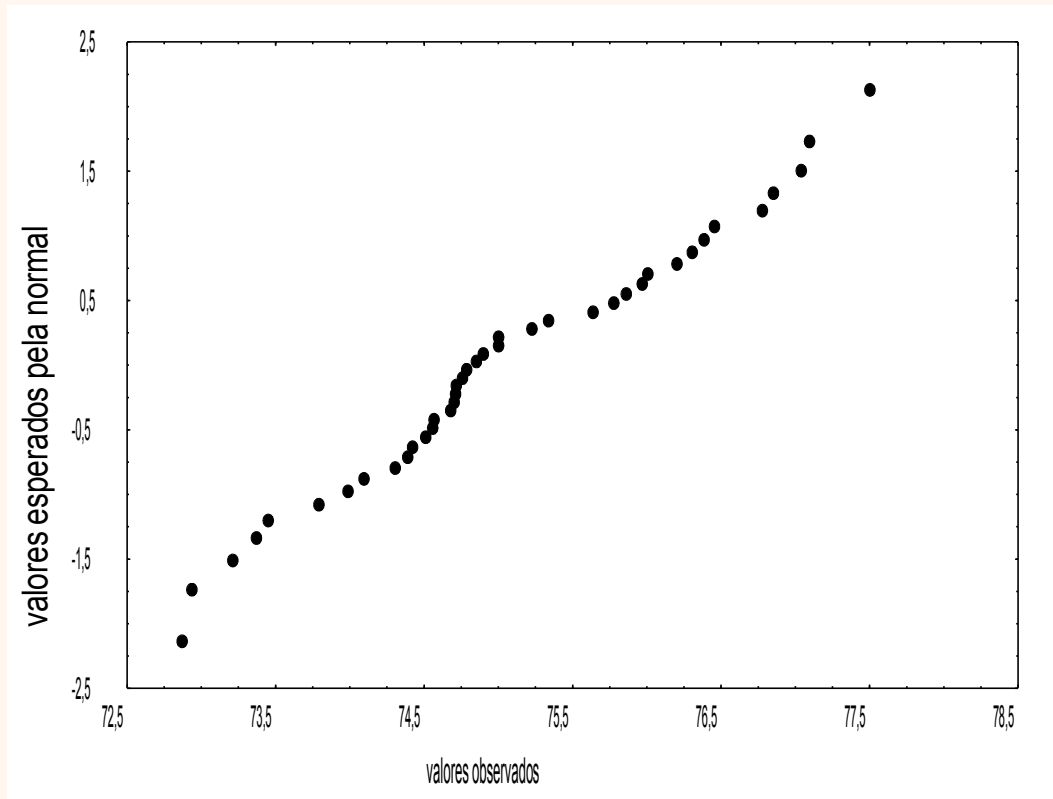


Gráfico de probabilidade normal

- Dados com distribuição normal, mas com um ponto discrepante

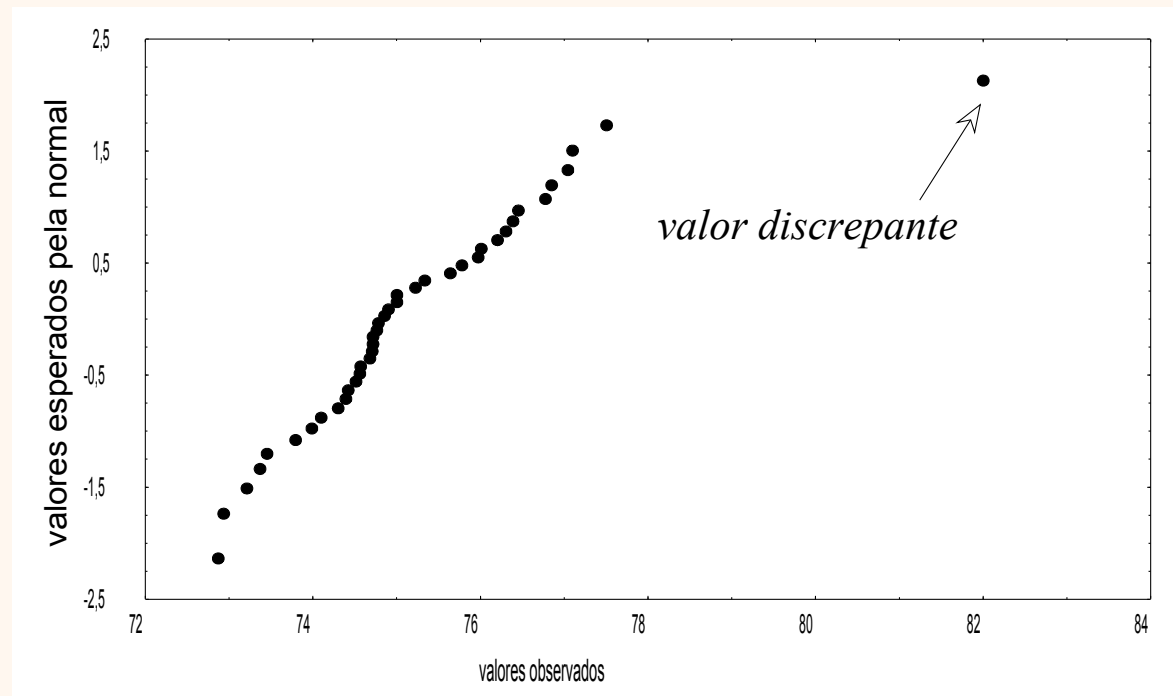


Gráfico de probabilidade normal

- Dados com distribuição assimétrica

