2 OPERAÇÕES E REPRESENTAÇÃO BÁSICAS EM 2D

Neste capítulo abordaremos os aspectos principais em um sistema gráfico 2D: Transformações 2D e o Sistema de Coordenadas Homogêneo

Como Modelamos as Tranformações de Objetos do Mundo Real em Computação Gráfica ?

Tanto na representação bidimensional de um mundo como na representação 3- ou n-dimensional, existem em computação gráfica 3 transformações geométricas primitivas, que podem ser combinadas para se obter o comportamento de um objeto no mundo em que está modelado: translação, escalonamento e rotação.

Veremos primeiramente estas transformações para o caso 2D

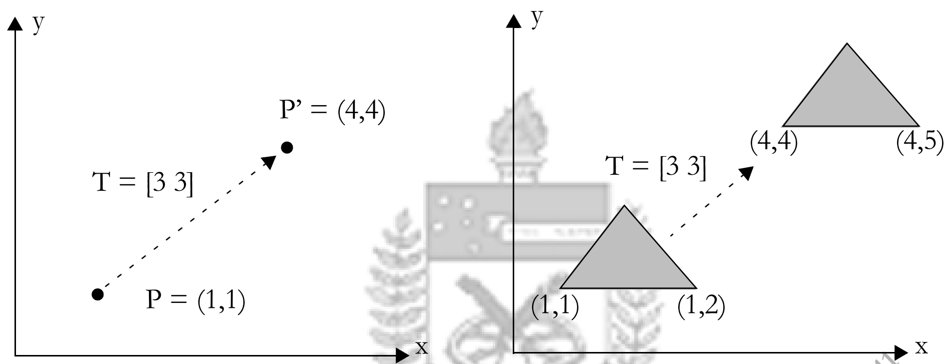
2.1. TRANSLAÇÃO 2D

Pontos no Plano xy podem ser transladados a novas posições através da adição de quantidades de translação às coordenadas de todos os seus pontos.

Para mover um ponto P(x,y) a distância e direção definida pelo vetor (Dx,Dy), podemos escrever:

- x' = x + Dx;
- y' = y + Dy.

Figura 2.12. Translação do ponto P e de um triângulo pela matriz de translação T = [3 3].



Em notação matricial:

P = [x y], P' = [x' y'], T = [Dx Dy]

Dessa forma reescrevendo de forma vetorial:

[x' y'] = [x y] + [Dx Dy] ou

P' = P + T

para todo P do objeto a ser transladado.

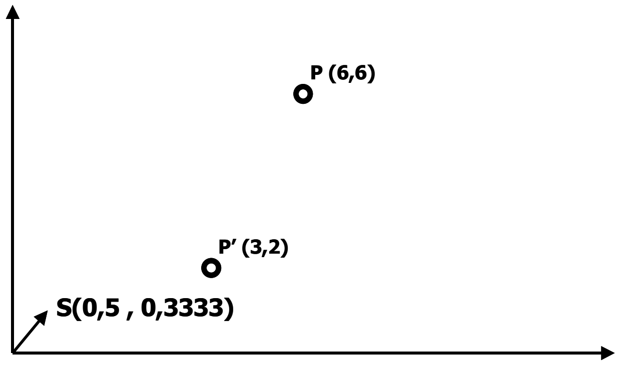
2.2. ESCALONAMENTO 2D

Pontos no Plano xy podem ser escalonados (esticados) por fatores de escala Sx e Sy através de multiplicação:

- x' = x . Sx,y' = y . Sy.

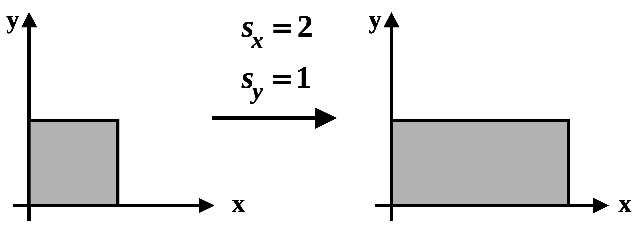
Onde o novo ponto é resultado da multiplicação do ponto pela escala.

Figura 2.13. Exemplo1: Na figura o ponto (6,6) foi escalonado em 1/2 em X e 1/3 em Y



No exemplo da figura 2.14 os valores de x foram escalonados em 2 (Sx) enquanto y foi escalonado em 1 (Sy). Observe o resultado a seguir:

Figura 2.14. Escalonamento com Sx=2 eS y=1



É possível realizar esta operação utilizando matrizes, ficando assim:

Definindo S como a matriz $S \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$

pode-se escrever a operação desta forma: $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$

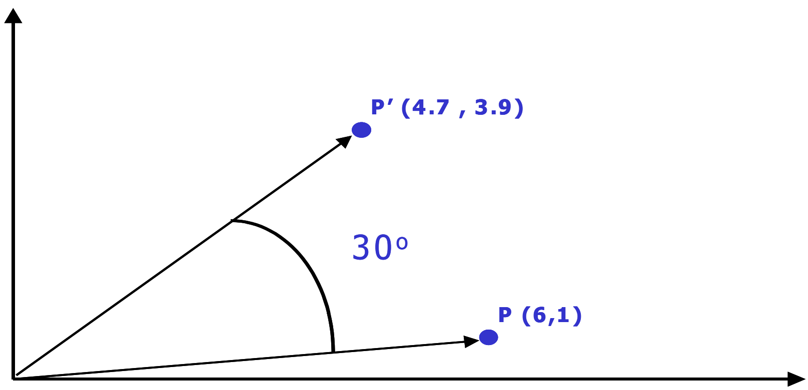
2.3. ROTAÇÃO 2D

Pontos no Plano xy podem ser rotacionados ao redor da origem por um ângulo q através da fórmula:

- $x' = x \,.\, \cos(q) - y \,.\, \text{sen}(q)$,
- $y' = x \,.\, \text{sen}(q) + y \,.\, \cos(q)$

Exemplo: Na figura 2.15 rotacionamos o ponto (6,1) em 30 graus em torno de (0,0).

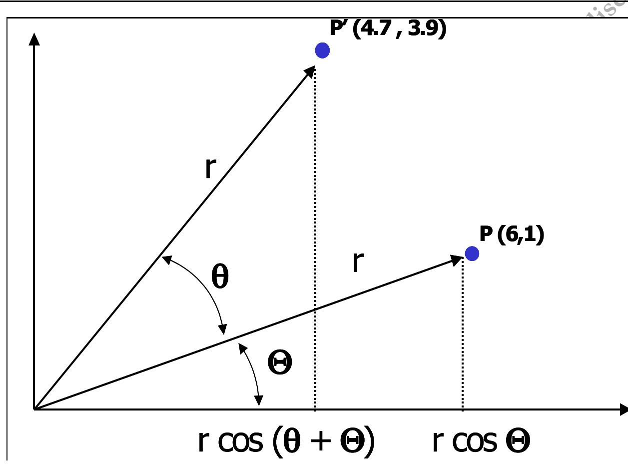
Figura 2.15. Rotação de 30 graus em torno da origem.



Sendo:

$x = r \cos q$ e $y = r \sin q$

Figura 2.16. Relações trigonométricas entre os vetores inicial e final do ponto rotacionado



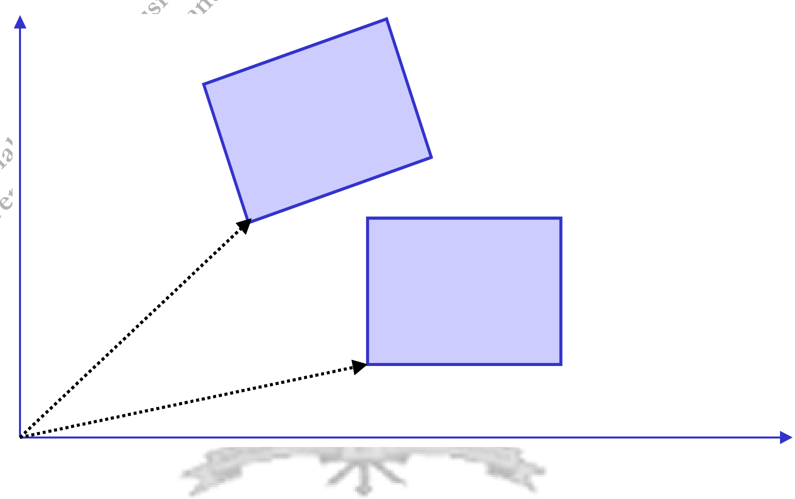
Vemos que:

- x' = r cos (q + Q) = r cos Q cos q - r sen Q sen q
- y' = r sen (q + Q) = r cos Q sen q + r sin Q cos q (Eq.2)

substituindo Eq.1 em Eq.2, obtemos então:

- x' = x . cos (q) - y . sen (q),
- y' = x . sen (q) + y . cos (q)

Figura 2.17. Rotação é sempre em torno da origem



2.4. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

Até o momento foram vistas fórmulas que descrevem casos especiais para as transformações que queremos realizar. Pode-se representar uma classe de objetos em um espaço n-dimensional sem a utilização de constantes explícitas.

Isto é chamado de representação em coordenadas homogêneas. Os sistemas de coordenadas homogêneas agilizam muito o cálculo das transformações, permitindo representar tudo da mesma forma.

A idéia geral é a de que todo problema em um espaço n-dimensional possui pelo menos um equivalente em um espaço (n+1)-dimensional. A obtenção de um resultado no espaço (n+1)-dimensional é muitas vezes muito mais fácil do que em um espaço n-dimensional. Os resultados são então projetados de volta ao espaço n-dimensional.

A representação em coordenadas homogêneas de um ponto em um espaço n-dimensional é a representação deste ponto em um espaço (n+1)-dimensional.

A representação de um ponto P(x,y) em um sistema de coordenadas homogêneo é:

- P(W.x , W.y , W) = P(X, Y, W)

para qualquer W <> 0

W é chamado de fator de escala e x = X/W e y = Y/W.

Nós sempre utilizaremos W = 1 e a divisão acima é desnecessária.

Pode-se imaginar um sistema de coordenadas homogêneo 2D como posicionar o plano xy na posição W do eixo z de um sistema 3D qualquer.

Assim pode-se representar qualquer operação geométrica como uma matriz 3x3. Desta forma pode-se realizar toda operação geométrica sobre um ponto como uma multiplicação de matrizes, onde uma é o ponto e a outra a matriz de transformação.

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(EQ. 2.3)}$$

Os parâmetros da matriz podem ser ajustados de forma a que represente as três operações:

Translação: $$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(EQ. 2.4)}$$

Escalonamento: $$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(EQ. 2.5)}$$

$$\text{Rotação: } \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(EQ. 2.6)}$$

Esta definição permite a concatenação de operações de uma forma muito eficiente. Como qualquer seqüência de operações lineares é sempre uma operação linear, podemos expressar qualquer seqüência de operações geométricas como uma única matriz, resultante da multiplicação das matrizes representando cada uma das operações. Através disto pode-se calcular uma única matriz, que será utilizada para transformar todos os pontos do objeto.

Exemplo: Escalonamento dos pontos de um objeto pelo ponto Sx = Sy = 2 seguido de uma translação pelo vetor Dx = 10 e Dy = 0 :

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(EQ. 2.7)}$$

$$\begin{bmatrix} x'' & y'' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(EQ. 2.8)}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(EQ. 2.9)}$$

$$\begin{bmatrix} x'' & y'' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(EQ. 2.10)}$$

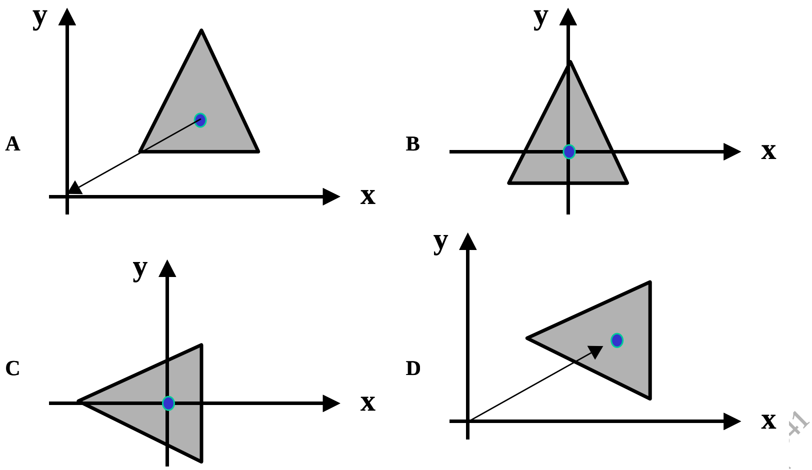
2.5. Rotação em torno de um ponto arbitrário

Isto é muito importante na rotação. Caso seja necessário rotacionar um objeto em torno de um ponto qualquer (por ex. seu próprio centro, que é a forma mais intuitiva de se rotacionar algum ponto ou objeto):

- é necessário transladar o ponto sobre o qual será efetuada a rotação para a origem;
- efetuar o processo de rotacionamento;
- transladar de volta à posição original;

A figura a seguir demonstra graficamente o processo.

Figura 2.18. Rotação 2D em toorno de um ponto arbitrário



Para isso pode-se calcular uma única matriz de rotação concatenada, como apresentada a seguir:

$$[x'' \ y'' \ 1] = [x \ y \ 1] \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -Dx & -Dy & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(EQ. 2.11)}$$

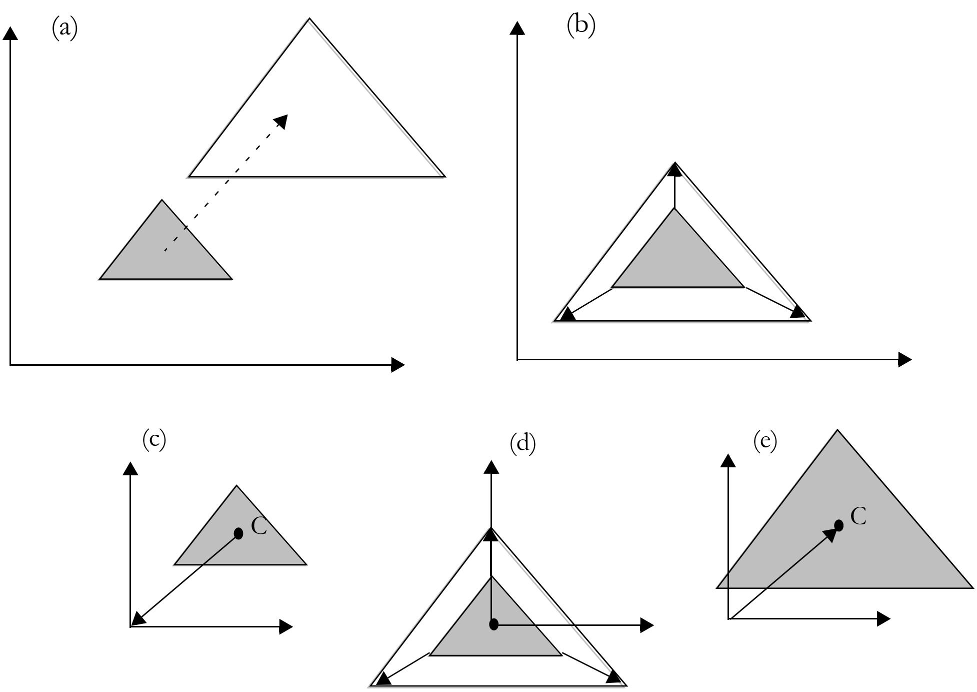
Qual ponto arbitrário escolher ?

Quando realizamos uma rotação de um objeto que temos me nossa mão ou quando imaginamo um objeto no espaço rodando, tipicamente realizamos esta rotação em torno de uma aproximação do centro do objeto. Isto é a forma mais natural de se rodar um objeto, pois o objeto parece rodar em torno de si mesmo. Para podermos rodar um objeto "em torno de si mesmo" em 2D necessitamos determinar o centro geométrico objeto. É este centro geométri que vamos utilizar como ponto arbitrário para realizar a rotação "natural" do objeto.

2.6. Escalonamento “Natural”

Se utilizamos a matriz de escalonamento pura e simplesmente, não teremos um efeito natural, pois o esclonamento será realizado em relação à origem, significando que o objeto, dependendo de sua distância da origem, vai se deslocar e não apenas “inchar” ou “encolher”. Para que o efeito seja conseguido, precisamos usar como referência para o escalonamento o centro do objeto e transladar este centro até a origem. Para isso é necessário determinar o centro do objeto (que você tem de fazer também para a rotação) e depois transladar o objeto de forma a que o centro esteja na origem e aí sim, você pode aplicar a operação de escalonamento. A seqüência de transformações para se obter um escalonamento “natural” está representada na figura 2.19 em (c,d,e), onde, depois de determinar o centro C, primeiro transladamos por C^{-1} (c), depois escalonamos em torno da origem (d) e por fim transladamos por C.

Figura 2.19. Escalonamento com utilização do centro do objeto como referência. Em (a) vemos o efeito de se aplicar a matriz de escalonamento baseada no vetor [2 2] a um triângulo. Em (b) vemos o efeito de “inchar” que parece mais natural e que nós gotaríamos de obter. A seqüência (c,d,e) mostra como obter este efeito.



Para tanto, você precisa também aqui criar uma matriz de transformação composta, da mesma forma como teve de fazer para a rotação arbitrária, representada na (EQ. 2.11). Neste caso a matriz vai ter a seguinte aparência:

$$[x'' \ y'' \ 1] = [x \ y \ 1] \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -Cx & -Cy & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Cx & Cy & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(EQ. 2.12)}$$

Onde [Cx, Cy] é o centro do objeto. Como calcular este centro você verá adiante. Sugerimos que, ao implementar, você crie um método genérico para calcular o centro geométrico de qualquer objeto, inclusive com vistas a mais tarde extendê-lo para 3D, para que você possa de forma elegante utilizar este cálculo tanto no preparo da matriz de rotação genérica como no preparo da matriz de escalonamento genérica.

2.7. Determinando o centro do objeto

Para determinar o centro do objeto, podemos utilizar a fórmula para o cálculo do centro de uma distribuição de amostras ou de cálculo do centro de massa da física. A fórmula geral, dada pela física, é bastante simples e representa a média das coordenadas (x,y) dos centros de massa das partículas que compõem um objeto ponderadas pela sua massa individual:

$$C_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad C_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \textbf{(EQ. 2.13)}$$

No caso de uma distribuição de pontos em uma amostra de dados ou de um polígono representado pelos seus vértices, consideramos que todos os pontos ou vértices possuem massa igual e unitária. Esta fórmula pode então ser simplificada, resultando na fórmula do centro geométrico de uma distribuição de pontos:

$$C_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad C_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \qquad \textbf{(EQ. 2.14)}$$

Utilize esta fórmula com os vértices de seu objeto como dados de entrada. Mais tarde, quando você for trabalhar em 3D, você vai precisar estender esta fórmula para o eixo z também.

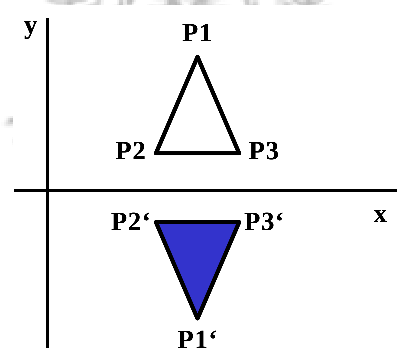
2.8. Reflexão

A operação para realizar a reflexão em torno do eixo X é dada por:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(EQ. 2.15)}$$

o resultado obtido pode ser observado na figura a seguir

Figura 2.20. Reflexão em X

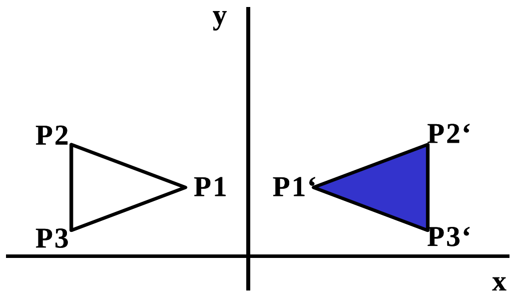


A operação para realizar a reflexão em torno do eixo Y é dada por:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(EQ. 2.16)}$$

a figura 2.21 a seguir ilustra o resultado:

Figura 2.21. Reflexão em Y

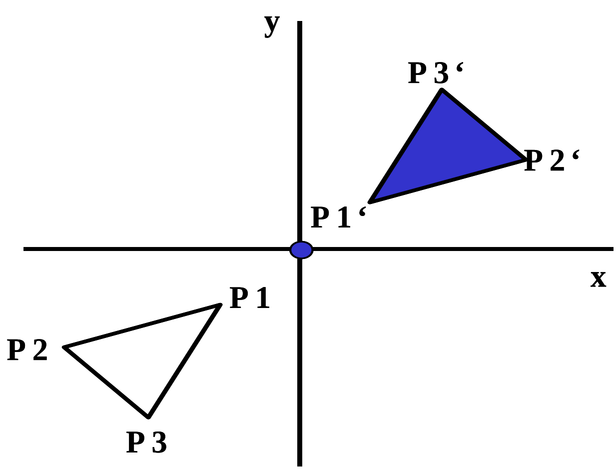


Realização da reflexão através da origem é dada por:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(EQ. 2.17)}$$

o resultado pode ser observado pela figura 2.22 a seguir.

Figura 2.22. Reflexão na origem

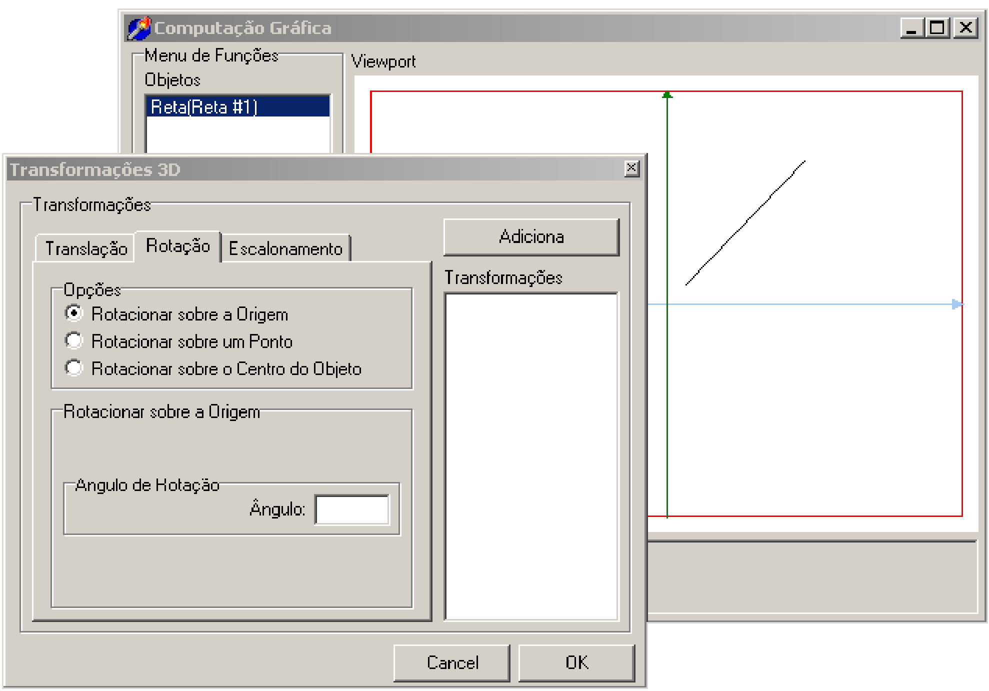


2.9. Exercício 1.2: Transformações em 2D

Neste exercício você vai expandir o seu SGI - Sistema Gráfico Interativo para suportar as 3 transformações básicas e a rotação arbitrária em 2D. Para tanto você vai criar uma rotina de transformação genérica, que aceita uma matriz de transformação em coordenadas homogêneas e um objeto qualquer para ser transformado e devolve este objeto após a aplicação da matriz. Esta rotina nada mais é do que uma forma extremamente simples de se impementar um *engine* gráfico. Para alimentar esta rotina você deve criar um conjunto de rotinas de "preparo" da matriz de transformação, que serão específicas para cada tranformação.

Para poder aplicar uma transformação sobre um determinado objeto do mundo, você deve permitir ao usuário que selecione um dos objetos de seu mundo na lista de objetos, escolha a transformação que deseja aplicar e entre com os dados para esta transformação em uma interface para isso.

Figura 2.23. SGI com tranformações 2D. Cortesia de Brian Schmitz Tani



Alternativamente você pode implementar a interação com os objetos através do mouse: permita ao usuário usar o botão direito do mouse para abrir um menu de contexto que permite aplicar uma transformação ao objeto sob o mouse. Em 2D isso é muito fácil de se implementar. Mais tarde, quando estivermos trabalhando em 3D, você verá que necessita de um algoritmo de buffer de profundidade para saber qual é o objeto mais próximo ao mouse na tela.

Na Figura 2.23. vemos a interface de um SGI mostrando a janela para entrada de dados de transformações sobre o objeto da lista que foi selecionado. Observe que a janela possui uma lista ao lado, onde são incluídas todasas transformações que se deseja realizar. A matriz de transformação resultante somente é calculada depois de o usuário entrar com todas as transformações que deseja.

Como realizar a as transfromações ?

Resta a questão de como deverão ser implementadas as transformações. O que nós desejamos que seja implementado são cinco transformações úteis ao usuário de um SGI:

- **translação**
- **escalonamento** "natural" em torno do centro do objeto
- **3 rotações**: rotação arbitrária, rotação do objeto em torno de seu centro e sobre a origem.

Na **translação** você simplesmente calcula a matriz no sistema de coordenadas homogêneo e aplica.

Para o **escalonamento** e para a **rotação** você vai precisar determinar o centro geométrico ou centro de massa do objeto a ser escalonado ou rotacionado. No caso da rotação nós já discutimos a razão para tanto: a rotação arbitrária que nos parece natural, é aquela onde um objeto roda em torno de seu centro. No caso do escalonamento temos a mesma situação: o escalonamento somente parece natural se o objeto parece "encolher" ou "inchar".